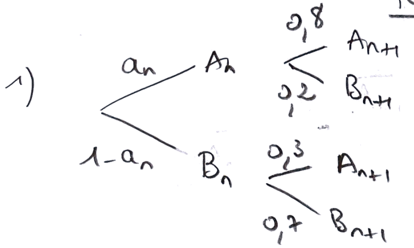
Révision Bac 2022 Proba et Suites

1)



$n \geq 1$ $\quad a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n + A_{n+1})$

(D'après la formule des probabilités totales)

donc $a_{n+1} = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1})$

$= a_n \times 0,8 + (1 - a_n) \times 0,3$

$= 0,8 a_n + 0,3 - 0,3 a_n$

$\boxed{a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,3}$

2) Notation : $P(A_1) = a_1 = a = 0,5$

a) * Pour $n = 1$ $\quad 0 \leq a_1 \leq 0,6$

donc propriété vrai pour $n = 1$

* Soit $n \geq 1$ tel que $0 \leq a_n \leq 0,6$

Démontrons que $0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$

On a

$0 \leq a_n \leq 0,6$

$0 \leq 0,5 a_n \leq 0,3$

$0 \leq 0,5 a_n + 0,3 \leq 0,6$

$0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$ $\quad$ CQFD

* D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $n \geq 1$ on a $0 \leq a_n \leq 0,6$

b) $a_{n+1} - a_n = 0,5 a_n + 0,3 - a_n = 0,3 - 0,5 a_n$

avec $0 \leq a_n \leq 0,6$

donc $0 \geq -0,5 a_n \geq -0,3$

$0,3 \geq 0,3 - 0,5 a_n \geq 0$

donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$ donc (a_n) croissante

c) $\forall n \geq 1$ $\quad 0 \leq a_n \leq 0,6$

donc (a_n) est croissante et majorée (par $0,6$)

donc elle converge.

On note $l = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

On a $a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,3$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} (0,5 a_n + 0,3)$

$l = 0,5 l + 0,3$

donc $0,5 l = 0,3$ $\qquad l = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 0,6$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6}$

3) $P(A_1) = a_1 = a$ $\qquad \forall n \geq 1$ on pose $U_n = a_n - 0,6$

a) $U_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5 a_n + 0,3 - 0,6 = 0,5 a_n - 0,3$

$U_{n+1} = 0,5 \left(a_n - \frac{0,3}{0,5}\right) = 0,5 (a_n - 0,6)$

$\boxed{U_{n+1} = 0,5 U_n}$

donc (U_n) est géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $U_1 = a_1 - 0,3 = a - 0,6$

b) $\forall n \geq 1$ $\quad U_n = U_1 \times q^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$

donc $a_n = U_n + 0,6 = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = (a - 0,6) \times 0 + 0,6 = \boxed{0,6}$

car $-1 < 0,5 < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$

La limite ne dépend pas de a

d) La publicité la plus vue est celle insérée dans le jeu de type A car $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0,4$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n > \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$