

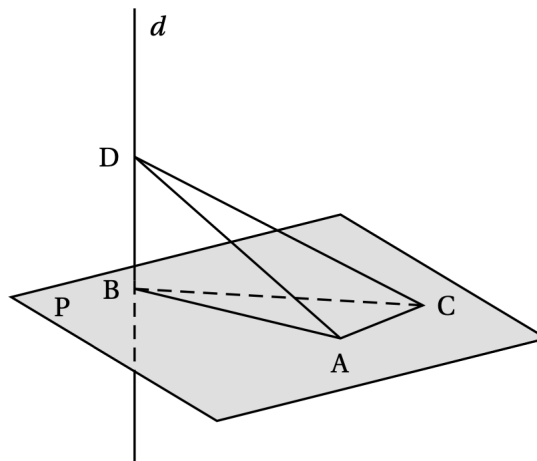
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

### Partie A

Dans un plan  $P$ , on considère un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$ .

Soit  $d$  la droite orthogonale au plan  $P$  et passant par le point  $B$ .

On considère un point  $D$  de cette droite distinct du point  $B$ .



1. Montrer que la droite  $(AC)$  est orthogonale au plan  $(BAD)$ .

On appelle *bicoïn* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Montrer que le tétraèdre  $ABCD$  est un bicoïn.
3.
  - a. Justifier que l'arête  $[CD]$  est la plus longue arête du bicoïn  $ABCD$ .
  - b. On note  $I$  le milieu de l'arête  $[CD]$ . Montrer que le point  $I$  est équidistant des 4 sommets du bicoïn  $ABCD$ .

### Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point  $A(3 ; 1 ; -5)$  et la droite  $d$  de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 9 \\ z = t - 3 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan  $P$  orthogonal à la droite  $d$  et passant par le point  $A$ .
2. Montrer que le point d'intersection du plan  $P$  et de la droite  $d$  est le point  $B(5 ; 5 ; -1)$ ,
3. Justifier que le point  $C(7 ; 3 ; -9)$  appartient au plan  $P$  puis montrer que le triangle  $ABC$  est un triangle rectangle isocèle en  $A$ .
4. Soit  $t$  un réel différent de 2 et  $M$  le point de paramètre  $t$  appartenant à la droite  $d$ .
  - a. Justifier que le triangle  $ABM$  est rectangle.
  - b. Montrer que le triangle  $ABM$  est isocèle en  $B$  si et seulement si le réel  $t$  vérifie l'équation  $t^2 - 4t = 0$ .
  - c. En déduire les coordonnées des points  $M_1$  et  $M_2$  de la droite  $d$  tels que les triangles rectangles  $ABM_1$  et  $ABM_2$  soient isocèles en  $B$ .

### Partie C

On donne le point  $D(9 ; 1 ; 1)$  qui est un des deux points solutions de la question 4. c. de la partie B.

Les quatre sommets du tétraèdre  $ABCD$  sont situés sur une sphère.

En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.