$\boxed{\text{Ex 1}}$

1) $p(x) = \dfrac{7}{e^x + x} = 7 \times \dfrac{1}{e^x + x}$ $\qquad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$p'(x) = 7 \times \dfrac{-(e^x + 1)}{(e^x + x)^2} = \dfrac{-7(e^x+1)}{(e^x+x)^2}$

2) $g(t) = \sqrt{\dfrac{1}{t} + 2}$ $\qquad (\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$

$g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{t}+2}} \times \left(-\dfrac{1}{t^2}\right)$

3) $h(\theta) = 3\theta(\theta+1)^4$ $\qquad (uv)' = u'v + uv'$

$(u^4)' = 4u^3 \times u'$

$h'(\theta) = 3(\theta+1)^4 + 3\theta \times 4(\theta+1)^3 \times 1$

$h'(\theta) = (\theta+1)^3\,(3(\theta+1) + 12\theta)$

$h'(\theta) = (\theta+1)^3\,(15\theta + 3)$

Factoriser si c'est possible

4) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$ $\qquad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(e^u)' = e^u \times u'$

$f'(x) = \dfrac{e^{x^2} \times 2x \times x - e^{x^2} \times 1}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^{x^2}(2x^2 - 1)}{x^2}$

$\boxed{\text{Ex 2}}$ $\quad U_0 = 1 \quad \forall n \geqslant 0 \quad U_{n+1} = 2U_n - n + 3$

<u>Démontrer par récurrence que :</u>

$\forall n \geqslant 0 \quad U_n = 3 \times 2^n + n - 2$

① <u>Initialisation</u> :

Pour $n = 0$ $\quad U_0 = 1$

$3 \times 2^n + n - 2 = 3 \times 1 - 2 = 1$

donc vrai pour $n = 0$

② <u>Hérédité</u> :

Soit $n \geqslant 0$ tel que $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$

Démontrer que $U_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + n - 1$

On a : $U_{n+1} = 2U_n - n + 3$

$= 2(3 \times 2^n + n - 2) - n + 3$

$= 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3$

$= 3 \times 2^{n+1} + n - 1$

CQFD.

③ <u>Conclusion</u> :

D'après le principe de raisonnement par récurrence

$\forall n \geqslant 0 \quad U_n = 3 \times 2^n + n - 2$

Ex 3 $U_0 = -1 \quad U_1 = \frac{1}{2} \quad \forall n \quad U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n$

1) $U_2 = U_1 - \frac{1}{4}U_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

2) $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$

a) $V_{n+1} = U_{n+2} - \frac{1}{2}U_{n+1} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n - \frac{1}{2}U_{n+1}$

$= \frac{1}{2}U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n$

$= \frac{1}{2}\left(U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n\right)$

$\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n}$ donc (V_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) $V_0 = U_1 - \frac{1}{2}U_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$V_n = V_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \boxed{V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

c) $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$ donc $U_{n+1} = V_n + \frac{1}{2}U_n$

$\boxed{U_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}U_n}$

d) Démontrons que pour tout $n \geq 0 \quad U_n = \frac{2n-1}{2^n}$

* Pour $n = 0$: $U_0 = -1$

$\frac{2n-1}{2^n} = \frac{-1}{2^0} = -1$ donc vrai pour $n = 0$.

* Soit $n \geq 0$ tel que $U_n = \frac{2n-1}{2^n}$

Démontrons que $U_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$

On a : $U_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times \frac{2n-1}{2^n}$

$U_{n+1} = \frac{1}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$U_{n+1} = \frac{2+2n-1}{2^{n+1}} = \frac{2n+1}{2^{n+1}} = \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$

* D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $n \geq 0$

$U_n = \frac{2n-1}{2^n}$.