Calculatrice autorisée

Durée : 1 heure 30

Exercice 1 — 5 points

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 + x - 1)\mathrm{e}^x$

   a. Calculer la dérivée de f.

   b. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$. (Ne pas calculer les images).

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x^2 + 3x)\mathrm{e}^x$.

   On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthogonal du plan.

   a. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire sur quel intervalle la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Exercice 2 — 4 points

Soit un réel a et la fonction f définie pour $x \neq -2$ par $f(x) = \dfrac{ax-2}{2x+4}$

1. Calculer la dérivée de f.

2. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

   Déterminer la valeur de a, sachant que $\mathscr{C}_f$ a au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = 3x - 1$.

Exercice 3 — 4 points

Afin d'entretenir une forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

Le nombre d'arbres de cette forêt est modélisé par une suite notée (U_n) où U_n désigne le nombre d'arbres au cours de l'année $(2013+n)$.

En 2013, la forêt compte 50 000 arbres.

1. Déterminer la valeur de U_0 et montrer que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par la relation $U_{n+1} = 0,95U_n + 3\ 000$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 60\ 000 - 10\ 000 \times 0,95^n$.

3. Déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice 4 — 7 points

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{2+3U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer U_1.

2. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = \dfrac{1}{U_n}$.

   a. Montrer que (V_n) est arithmétique de raison $\dfrac{3}{2}$ et préciser son premier terme.

   b. Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n.

   c. Calculer $S = V_0 + V_1 + V_2 + \dots V_{40}$.