Ex 1

1) $f(x) = (2x^2+x-1)e^x$

a) $f'(x) = (4x+1)e^x + (2x^2+x-1)e^x$

$= e^x(4x+1+2x^2+x-1)$

$= e^x(2x^2+5x)$

b) Signe de $f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$

$2x^2+5x = ax^2+bx+c$

Racines ? $2x^2+5x=0$

$x(2x+5)=0$

$\boxed{x=0}$ ou $2x+5=0$

$\boxed{x=-\frac{5}{2}}$

$a=2>0$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		0	$+\infty$
e^x	+		+		+
$2x^2+5x$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

2) $g(x) = (2x^2+3x)e^x$

a) $f(x)-g(x) = (2x^2+x-1)e^x - (2x^2+3x)e^x$

$= (2x^2+x-1-2x^2-3x)e^x$

$= (-2x-1)e^x$

Signe de $-2x-1$

$-2x-1 = ax+b$ avec $a=-2<0$ donc fonction affine ↘

et $-2x-1=0$

$-2x=1$

$x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
e^x	+		+
$-2x-1$	+	0	−
$f(x)-g(x)$	+	0	−

b) C_f est au-dessus de C_g quand $f(x) \geq g(x)$

ou $f(x)-g(x) \geq 0$ donc sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$

Ex 2

$a \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{ax-2}{2x+4}$ pour $x \neq -2$

1) $f'(x) = \frac{a(2x+4)-(ax-2)\times 2}{(2x+4)^2}$ Forme $\frac{u}{v}$

$= \frac{2ax+4a-2ax+4}{(2x+4)^2} = \boxed{\frac{4a+4}{(2x+4)^2}}$

2) La tangente est parallèle à la droite d'équation $y=3x-1$ si ces deux droites ont le même coefficient directeur

Coeff tangente au point d'abscisse 0 est $f'(0)$

Coeff$(\Delta) = 3$

donc on cherche a tel que $f'(0)=3$

$\frac{4a+4}{4^2} = 3$

$\frac{4a+4}{16} = 3$

$4a+4 = 48$

$4a = 44$

$\boxed{a = 11}$

Rmq $\longrightarrow \frac{4(a+1)}{4\times 4} = 3$

$\frac{a+1}{4} = 3$

$a+1 = 12$

$a = 11$

Ex3

1) Nombre d'arbres en 2013 + n : U_n

donc $U_0 = 50.000$. (Nbre d'arbres en 2013)

et $U_{n+1} = \left(1 - \frac{5}{100}\right) \times U_n + 3000$

c'est-à-dire $\boxed{U_{n+1} = 0{,}95\, U_n + 3000}$

2) (U_n) est ~~arithmético~~ géométrique car de la forme

$U_{n+1} = a U_n + b$

① On cherche le réel k tel que $k = 0{,}95 k + 3000$

$k - 0{,}95 k = 3000$

$0{,}05\, k = 3000$

$k = \frac{3000}{0{,}05} = \frac{\cancel{5} \times 600}{\cancel{5} \times 0{,}01} =$

$k = \frac{600}{10^{-2}} = 600 \times 10^2 = 60.000$

$\boxed{k = 60\,000}$

② On pose $V_n = U_n - 60\,000$

$V_{n+1} = U_{n+1} - 60\,000$

$= 0{,}95\, U_n + 3\,000 - 60\,000$

$= 0{,}95\, U_n - 57\,000$

$= 0{,}95 \left(U_n - \frac{57000}{0{,}95}\right)$

$= 0{,}95 \left(U_n - 60\,000\right)$

$\boxed{V_{n+1} = 0{,}95 V_n}$

donc (V_n) est géométrique de raison 0,95

et de premier terme $V_0 = U_0 - 60\,000$

$V_0 = 50.000 - 60.000$

$V_0 = -10.000$

③ On a $V_n = V_0 \times q^n$

$V_n = -10\,000 \times 0{,}95^n$

et $U_n = V_n + 60\,000$

donc $\boxed{U_n = -10.000 \times 0{,}95^n + 60\,000}$

Ex3 (2)

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$ car $0 < 0{,}95 < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 60\,000 - 10\,000 \times 0{,}95^n$

$= 60\,000 - 10\,000 \times 0$

$= \boxed{60.000}$

$\boxed{Ex\,4}$ $U_0 = 2$ $U_{n+1} = \frac{2U_n}{2+3U_n}$ $n \geq 0$.

1) $U_1 = \frac{2U_0}{2+3U_0} = \frac{4}{2+6} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$

2) $V_n = \frac{1}{U_n}$

a) $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{2+3U_n}{2U_n} - \frac{1}{U_n}$

$= \frac{2+3U_n}{2U_n} - \frac{2}{2U_n} = \frac{3U_n}{2U_n} = \frac{3}{2}$

donc $\boxed{V_{n+1} = V_n + \frac{3}{2}}$

La suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2}$
et de premier terme $V_0 = \frac{1}{U_0} = \frac{1}{2}$

b) $V_n = V_0 + nr$

$\boxed{V_n = \frac{1}{2} + \frac{3n}{2}}$ $V_n = \frac{1+3n}{2}$

$U_n = \frac{1}{V_n} = \boxed{\frac{2}{1+3n}}$

c) $S = V_0 + V_1 + \dots + V_{40}$

$= \frac{(V_0 + V_{40}) \times 41}{2} =$

$= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{121}{2}\right) \times 41}{2}$

$= \frac{61 \times 41}{2}$

$= \boxed{1250{,}5}$

$V_0 = \frac{1}{2}$

$V_{40} = \frac{1}{2} + \frac{3 \times 40}{2}$

$V_{40} = \frac{121}{2}$