Calculatrice interdite

Durée : 1 heure

Exercice 1 — 7 points

1. Donner le résultat en une puissance de 3 : $\dfrac{9^{n+1}}{3^n}$
2. Pour $n \geqslant 0$, $U_n = \dfrac{7^n}{2^{2n+1}}$.

   Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
3. On rappelle que pour tout entier naturel, $n \geqslant 1$, $\quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$

   a. Pour $n \geqslant 0$, $V_n = \dfrac{7^n}{n!}$.

   Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n

   b. Réduire : $\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$
4. Calculer : $\dfrac{2^n - 2^{n+1}}{2^n - 2^{n-2}}$

Exercice 2 — 6 points

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2\mathrm{e}^x$

   On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

   a. Calculer la dérivée de f.

   b. Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   c. Déterminer l'intersection de la tangente (Δ) avec l'axe des abscisses.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x\mathrm{e}^x$.

   On note $\mathscr{C}_g$ la représentation graphique de la fonction g.

   a. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$

   b. En déduire sur quels intervalles $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{C}_g$.

Exercice 3 — 7 points

Soit la suite (U_n) définie par $\quad U_0 = 1 \quad$ et $\quad U_{n+1} = \dfrac{2U_n - 4}{U_n + 6} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

et la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $\quad V_n = \dfrac{1}{U_n + 2}$.

1. Calculer U_1 et U_2 (Donner le résultat sous forme irréductible)
2. Montrer que (V_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$ et préciser son premier terme.
3. Exprimer V_n en fonction de n
4. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.