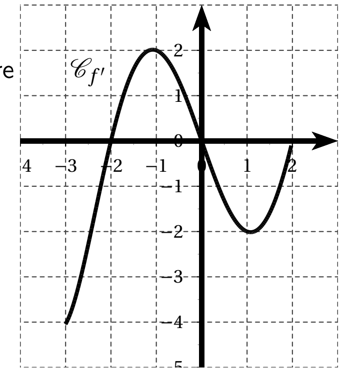
15/11/22 **DS 2 : Suites et convexité d'une fonction** **Terminale**

Calculatrice autorisée

Exercice 1 — 3 points



On donne ci-contre la **représentation graphique de la dérivée** f' d'une fonction f dans un repère orthonormé du plan. La dérivée de la fonction f est connue sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$.

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes en justifiant.

1. Quelles sont les variations de la fonction f sur $[-3\,;\,2]$?

2. Quelle est la convexité de la fonction f sur $[-3\,;\,2]$?

Exercice 2 — 4 points

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

On a les informations suivantes :
- le point $E\left(0\,;\,\dfrac{-4}{5}\right)$ appartient à $\mathscr{C}_f$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = (-5x+2)^3$

1. Calculer la dérivée seconde de f.

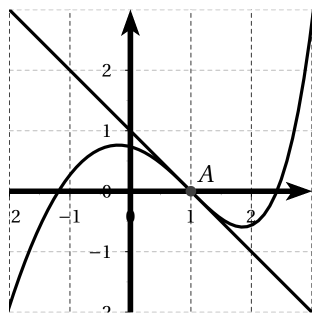
2. En déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer l'équation de la droite (Δ) tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E.

4. Quelle est la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ) ?

Exercice 3 — 5 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^{x-1} - x^2 - x$ dont on donne ci-dessous la représentation graphique dans un repère orthonormé.



1. **a.** Par lecture graphique, conjecturer la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$

b. Démontrer la conjecture.

c. Justifier que le point A est un point d'inflexion.

2. **a.** Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point A.

b. En déduire que pour tout $x \geqslant 1$, on a : $\mathrm{e}^{x-1} \geqslant \dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)$.

Exercice 4 — 8 points

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 4 - \dfrac{9}{U_n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie A

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 < U_{n+1} < U_n.$$

2. En déduire que la suite (U_n) est convergente.

3. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$.

Déterminer la valeur de ℓ.

Partie B

1. Démontrer que pour tout n, on a $U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 1}{U_n+2}$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$.

a. Montrer que (V_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. Exprimer V_n en fonction de n .

c. En déduire U_n en fonction de n.