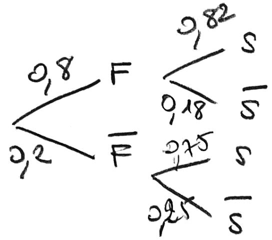
Ex 1

1 a)



b) $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 5\% = 0{,}05$

et $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(\overline{S})$

donc $0{,}05 = 0{,}2 \times P_{\overline{F}}(\overline{S})$

donc $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \dfrac{0{,}05}{0{,}2} = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4} = \boxed{0{,}25}$

arbre 0,25 et 0,75

c) D'après la formule des probabilités totales

$P(S) = P(F \cap S) + P(\overline{F} \cap S)$

$= P(F) \times P_F(S) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(S)$

$= 0{,}8 \times 0{,}82 + 0{,}2 \times 0{,}75$

$= \boxed{0{,}806}$

d) $P_S(F) = \dfrac{P(F \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}8 \times 0{,}82}{0{,}806} \simeq \boxed{0{,}814}$

2)

a) Valeurs possibles de B : 10, 0, 5

Loi de probabilité de B.

$P(B = 10) = P(F \cap S) = 0{,}8 \times 0{,}82 = \boxed{0{,}656}$

$P(B = 0) = P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0{,}806$

$= \boxed{0{,}194}$

$P(B = 5) = P(\overline{F} \cap S) = 0{,}2 \times 0{,}75$

ou $P(B = 5) = 1 - P(B = 10) - P(B = 0)$

$= 1 - 0{,}656 - 0{,}194 = \boxed{0{,}15}$

b) $E(B) = 10 \times P(B = 10) + 0 \times P(B = 0) + 5 \times P(B = 5)$

$= 10 \times 0{,}656 + 5 \times 0{,}15 = \boxed{7{,}31}$

c) Pour la vente de 100 jouets, on peut prévoir un bénéfice de 731 €

3)

a) * Epreuve de Bernoulli :

On prélève un jouet

Succès : le jouet a réussi le test de solidité.

$P(S) = p = 0{,}806$

* 4 épreuves identiques et indépendantes

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès

X suit la loi $\mathcal{B}(4 ; 0{,}806)$

b) $P(X = 3) = \binom{4}{3} \times p^3 \times q^1$

$= \binom{4}{3} \times 0{,}806^3 \times 0{,}194$

$q = 1 - p$

$q = 1 - 0{,}806$

$q = 0{,}194$.

$\boxed{P(X = 3) \simeq 0{,}406}$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$= 1 - q^4$

$= 1 - 0{,}194^4$

$\boxed{P(X \geq 1) \simeq 0{,}999}$

$\boxed{Ex\,2}$

1) ① $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n}-5n^2 = +\infty-\infty$ FI

$$2\sqrt{n}-5n^2 = n^2\left(\frac{2\sqrt{n}}{n^2}-5\right) = n^2\left(\frac{2}{n\sqrt{n}}-5\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{n}-5n^2 = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{2}{n\sqrt{n}}-5\right)$$

$$= +\infty\,(0-5) = \boxed{-\infty}$$

② $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-4\times3^n-7}{5^n-1} = \frac{-\infty}{+\infty} = -\infty\times0$ FI

car $5>1$
$3>1$

$$\frac{-4\times3^n-7}{5^n-1} = \frac{3^n\left(-4-\frac{7}{3^n}\right)}{5^n\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{-4-\frac{7}{3^n}}{1-\frac{1}{5^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-4\times3^{-n}-3}{5^n-1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{-4-\frac{7}{3^n}}{-1-\frac{1}{5^n}} = 0\times\frac{-4}{-1} = \boxed{0}$$

car $-1<\frac{3}{5}<1$

③ $\lim\limits_{n\to+\infty} 5-\frac{7^{n+1}}{2^n} = 5-\frac{+\infty}{+\infty}$ FI du type $\infty\times0$

$$5-\frac{7^{n+1}}{2^n} = 5-\frac{7^n\times7}{2^n} = 5-\left(\frac{7}{2}\right)^n\times7$$

$$\lim_{n\to+\infty} 5-\frac{7^{n+1}}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 5-\left(\frac{7}{2}\right)^n\times7 = 5-\infty = \boxed{-\infty}$$

car $-1<\frac{7}{2}<1$

2) $n\geq1$ $u_n = \frac{(-1)^n}{n}-e^n$

Pour n pair : $u_n = \frac{1}{n}-e^n$

Pour n impair $u_n = -\frac{1}{n}-e^n$

donc pour tout $n\geq1$ $-\frac{1}{n}-e^n\leq u_n\leq\frac{1}{n}-e^n$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}-e^{-n} = 0-\infty = -\infty.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}-e^n = 0-\infty = -\infty$$

On a donc $u_n\leq\frac{1}{n}-e^n$ pour tout $n\geq1$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-e^n = -\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$