TD 7 : Probabilités - Exercices — Terminale

Exercice 1

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

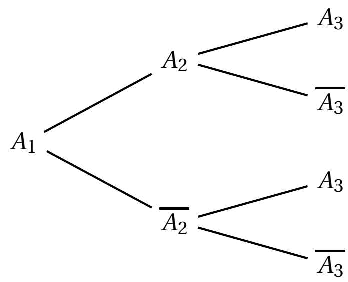
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

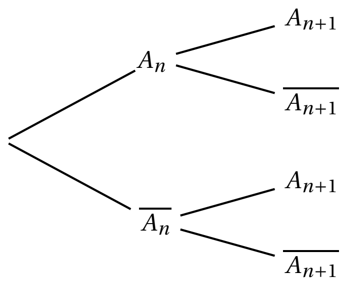
On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ». On a ainsi $P(A_1) = 1$.

Partie 1



1. Compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.
2. Démontrer que $P(A_3) = 0{,}85$.
3. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.

Partie 2 Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.



1. Compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux semaines numéro n et $n+1$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4$.
3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0{,}8$.

   b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

   c. La suite (p_n) est-elle convergente ?
4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = p_n - 0{,}8$.

   a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme u_1 et la raison.

   b. Exprimer u_n en fonction de n.

   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$.

   c. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice 2 Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire deux parties successives.

La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2. Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne la première partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd la première partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

On appelle :
- E_1 l'évènement « le joueur perd la première partie »
- E_2 l'évènement « le joueur perd la deuxième partie »
- X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des deux parties.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra s'aider d'un arbre pondéré).
3. Calculer l'espérance de X.