Propriétés algébriques de la fonction $\ln$

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln\left(e^3\right)$ $\quad B = \ln\left(e^{-4}\right)$ $\quad C = \ln\left(\dfrac{1}{2e^5}\right)$ $\quad D = \ln\left(\sqrt{5}+2\right) + \ln\left(\sqrt{5}-2\right)$

Exercice 2

Réduire ou écrire sous une autre forme si c'est possible :

$A = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$E = \ln(x+1)$	$G = \ln(x) \times \ln(y)$	$I = \dfrac{\ln(x)}{\ln(y)}$
$B = 3\ln(x) - \ln(y)$			$J = \dfrac{\ln(x)}{\ln(x^2)}$
$C = -\ln(x) - \ln(y)$			
$D = \ln(x) - \ln\left(x^2+x\right)$	$F = \ln\left(\dfrac{1}{x}+x\right) - \ln(x)$	$H = \ln(x) \times \ln\left(x^2\right)$	

Exercice 3

Ecrire les expressions suivantes sous la forme $\ln(A(x))$:

$A = \ln\left(x^2-1\right) - 2\ln(x-1)$ $\quad B = \dfrac{1}{2}\ln(x+2) + 3\ln(x)$ $\quad C = -\ln\left(\dfrac{x}{3}\right) - 5\ln(x)$

Exercice 4

Pour tout réel x, soit $\quad f(x) = \ln\left((x+1)^2\right) - \ln\left((x-1)^2\right)$

Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.

Exercice 5

Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0 \quad U_{n+1} = e^2 U_n$.

On pose pour tout entier naturel n, $V_n = \ln(U_n)$

Remarque : La suite (V_n) est bien définie car on démontre par récurrence que pour tout entier n, $U_n > 0$.

1. Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

2. Exprimer V_n en fonction de n.

3. En déduire U_n en fonction de n.

Exercice 6

Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0 \quad U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{5}$.

On pose pour tout entier naturel n, $V_n = \ln\left(\dfrac{U_n}{5}\right)$

Remarque : La suite (V_n) est bien définie car on démontre par récurrence que pour tout entier n, $U_n > 0$.

1. Démontrer que la suite (V_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

2. Exprimer V_n en fonction de n.

3. En déduire U_n en fonction de n.