ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Mathématiques

Lundi 16 Janvier 2023

Sujet 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le sujet est composé de 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4 et comporte 4 exercices.

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ .... **5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x)$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

En déduire le tableau de variations de f.

3. On admet que, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f''(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2}$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

b. On note A le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\ ;\ f\left(\sqrt{2}\right)\right)$.

Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$. Soit M le point de coordonnées $(t\ ;\ f(t))$.

En utilisant la question 4. a, indiquer, selon la valeur de t, les positions relatives du segment [AM] et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ .... **4,5 points**

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\quad U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{U_n + 4}$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n > 0$.

b. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.

c. Que peut-on en conclure concernant la suite (U_n) ?

2. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \dfrac{4}{U_n}$.

a. Démontrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de V_n en fonction de n.

c. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de U_n en fonction de n.

d. En déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 3 . . . . **7 points**

Les parties A,B et C sont indépendantes.

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant. Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

— à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,9$;

— si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,95$;

— si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,2$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

Partie A

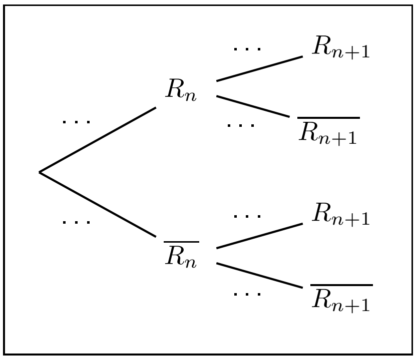
1. Modéliser la situation pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.
2. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.
3. Calculer la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine.
4. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Partie B

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine.

On a alors $r_n = P(R_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



2. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.
3. On pose pour tout $n \geqslant 1$, $\quad U_n = r_n - 0,8$.

   Démontrer que (U_n) est une suite géométrique.
4. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\quad r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.
5. Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

L'agriculteur ouvre son marché à de nouveaux clients. La probabilité qu'une personne rapporte la bouteille la troisième semaine est de 0,275. On considère le nombre de nouveaux clients suffisamment important pour que le choix de 15 clients soit assimilé à 15 tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de clients parmi les 15 choisis qui rapportent la bouteille la troisième semaine.

1. Préciser et justifier la loi de probabilité de X.
2. Combien de bouteilles peut-on s'attendre à récupérer la troisième semaine ?
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait 7 bouteilles ramenées la troisième semaine. (probabilité arrondie à 10^{-3})
4. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins une bouteille ramenée la troisième semaine. (probabilité arrondie à 10^{-3})

Exercice 4 .... **3,5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

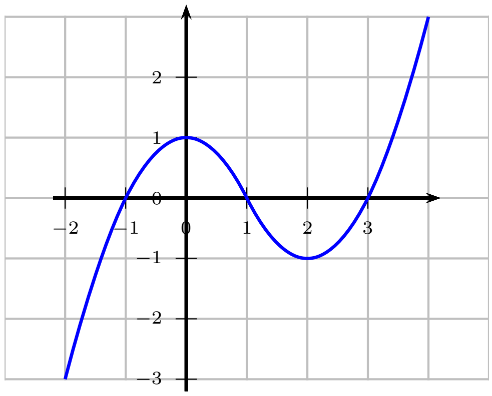
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$

Pour tout nombre réel x strictement positif :

a. $g'(x) = \dfrac{1}{2x+1}$	**b.** $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$	**c.** $g'(x) = \ln(2x+1)$	**d.** $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

2. On donne ci-dessous la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :

a. f est décroissante sur $[0\ ;\ 2]$	**b.** f est décroissante sur $[-1\ ;0]$	**c.** f a un maximum en 1 sur $[0\ ;2]$	**d.** f a un maximum en 3 sur $[2\ ;\ 4]$

3. Soit a, b deux réels et pour $x \in \mathbb{R}$ soit $f(x) = ax^2 + 2bx$

Si la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite d'équation $y = 4x + 6$ alors :

a. $a = 3 - b$	**b.** $a = 2 - b$	**c.** $a = 4 - 2b$	**d.** $a = 6 - 2b$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x :

a. $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}$	**b.** $g(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$	**c.** $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}(1+2x)$	**d.** $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}\left(1+2x^2\right)$

5. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = h(3x)$, alors, une primitive F de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $F(x) = H(3x)$	**b.** $F(x) = 3H(3x)$	**c.** $F(x) = \dfrac{1}{3}H(3x)$	**d.** $F(x) = 3H(x)$