BB 2023 Sujet 2

Ex 1 Partie 1

$x \in]0,+\infty[\quad g(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$

1) $g'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times x - 2\ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln(x)}{x^2}$

2) $\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{2(-\infty)}{0^+} = -\infty \, (+\infty) = \boxed{-\infty}$

car $x > 0$ (Asymptote d'équation $x = 0$)

D'après le tableau $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C_g en $+\infty$

Sens de variation de g

Signe de $g'(x)$ sur $]0,+\infty[$

$2 - 2\ln(x) = 0 \iff -2\ln(x) = -2$

$\iff \ln(x) = 1$

$\iff x = e$

$2 - 2\ln(x) > 0 \iff -2\ln(x) > -2$

$\iff \ln(x) < 1$

$\iff x < e$

x	0	1	e	$+\infty$
$2-2\ln(x)$	$+$		0	$-$
$g'(x)$	$+$		0	$-$
$g(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\frac{2}{e}$	$\searrow 0$

$g(e) = \frac{2\ln(e)}{e} = \frac{2}{e}$

3)

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

Partie 2 $\quad x \in]0,+\infty[\quad f(x) = (\ln(x))^2$

1) $f'(x) = 2(\ln(x)) \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x)}{x}$

donc $f'(x) = g(x)$

donc f est une primitive de g.

2) a) D'après $f'(x) = g(x)$

les variations de f' donc de g donne la convexité de f.

Sur $]0,e[$ g croissante donc f' croissante et donc f convexe

Sur $]e,+\infty[$ f est concave (car f' décroissante)

b) Sens de variation de f

le signe de f' donc de g donne les variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

3 a) Tangente à C_f au point d'abscisse e

$y = f'(e)(x-e) + f(e) \qquad f(e) = (\ln(e))^2 = 1^2 = 1$

$y = \frac{2}{e}(x-e) + 1 \qquad f'(e) = g(e) = \frac{2}{e}$

$\boxed{y = \frac{2}{e}x - 1}$

b) Sur $]0,e]$ f convexe donc C_f est au dessus de la tangente au point d'abscisse e

donc $f(x) \geq \frac{2}{e}x - 1$

càd $(\ln(x))^2 \geq \frac{2}{e}x - 1$

$\boxed{\text{Ex2}}$ $u_0 = 1$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

1) (u_n) n'est pas géométrique car n'est pas de la forme $u_{n+1} = u_n \times q$ avec q constante

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \le u_n \le e^2$

a) $u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}\,(e - \sqrt{u_n})$

$\sqrt{u_n} \geq 0$ et $1 \le u_n \le e^2$

$\sqrt{1} \le \sqrt{u_n} \le \sqrt{e^2}$ $\quad x \mapsto \sqrt{x}$ ↗ sur $[0,+\infty[$

$1 \le \sqrt{u_n} \le e$

donc $e - \sqrt{u_n} \geq 0$

Conclusion : $u_{n+1} - u_n \geq 0$

donc (u_n) croissante.

b) (u_n) est croissante et majorée par e^2 donc elle converge

3) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \ln(u_n) - 2$

a) $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$

$= \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n}) - 2$

$= 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2$

$= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1$

$= \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n}$$

donc (v_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme

$v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(1) - 2$

$v_0 = -2$

b) $v_n = v_0 \times q^n$

$v_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -2 \times \frac{1}{2^n} = \boxed{-\frac{1}{2^{n-1}}}$

c) $\ln(u_n) - 2 = v_n$

$\ln(u_n) = v_n + 2$

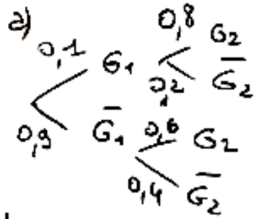
$u_n = e^{v_n + 2}$ $\quad$ donc $u_n = e^{-\frac{1}{2^{n-1}} + 2}$

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{2^{n-1}} + 2 = -\frac{1}{+\infty} + 2 = 2$ $\quad$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{X \to 2} e^X = \boxed{e^2}$

car $2 > 1$ et $\lim 2^{n-1} = \lim 2^n = +\infty$

$\boxed{\text{Ex3}}$

1) a)



b) $p_2 = P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2)$

d'après la formule des probabilités totales.

$p_2 = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(G_2)$

$= 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}9 \times 0{,}6$

$= 0{,}08 + 0{,}54$

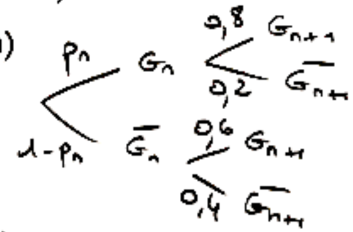
$= \boxed{0{,}62}$

c) $P_{G_2}(\overline{G_1}) = \dfrac{P(\overline{G_1} \cap G_2)}{P(G_2)} = \dfrac{0{,}9 \times 0{,}6}{0{,}62} = \dfrac{0{,}54}{0{,}62} = \dfrac{54}{62} = \boxed{\dfrac{27}{31}}$

$\simeq \boxed{0{,}87}$

2) $n \geq 1$

a)



b) $p_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$

$= p_n \times 0{,}8 + (1 - p_n) \times 0{,}6$

$= 0{,}8\, p_n + 0{,}6 - 0{,}6\, p_n$

$= 0{,}2\, p_n + 0{,}6$

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}}$$

$0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Ex 3 (2)

c) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

* Pour $n = 1$ $p_1 = P(G_1) = 0{,}1$

$$\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{4} - \frac{13}{20}$$
$$= \frac{15-13}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

donc vrai pour $n = 1$

* Soit $n \geq 1$ tel que $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

on va démontrer que $p_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$

On a $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{3}{5}$$
$$= \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{3}{5}$$
$$= \frac{3}{20} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{12}{20}$$
$$= \frac{15}{20} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \quad \text{CQFD}$$

* Conclusion : pour tout $n \geq 1$

$$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

$$= \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times 0 \qquad \text{car } -1 < \frac{1}{5} < 1$$
$$= \boxed{\frac{3}{4}}$$

e) On cherche n tels que $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$

$$\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$$
$$\Leftrightarrow \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \times \frac{4}{13} \quad \ln \nearrow$$
$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{5}\right) < \ln\left(\frac{4 \times 10^{-7}}{13}\right) \quad : \ln\left(\frac{1}{5}\right) < 0$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{4 \times 10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \simeq 10{,}8 \quad \text{car } 0 < \frac{1}{5} < 1$$

donc $\boxed{n \geq 11}$

Ex 3 (3)

3 a) Épreuve de Bernoulli :

Un joueur joue 2 parties

Succès : le joueur gagne la deuxième partie

$P(S) = p = 0{,}62$

10 épreuves identiques et indépendantes

N compte le nombre de succès

N suit la loi $\mathcal{B}(10 ; 0{,}62)$

b) $P(N = 6) = \binom{10}{6} \times p^6 \times q^4$ $\qquad q = 1 - p = 0{,}38$

$$= \binom{10}{6} \times 0{,}62^6 \times 0{,}38^4$$

$P(N = 6) \simeq \boxed{0{,}249}$

c) $P(N \leq 9) = 1 - P(X = 10)$
$= 1 - p^{10} = \boxed{1 - 0{,}62^{10}} \simeq \boxed{0{,}992}$

d) $E(N) = np = 10 \times 0{,}62$

$\boxed{E(N) = 6{,}2}$

En moyenne, on peut espérer que sur 10 joueurs 6 joueurs gagnent la deuxième partie.

$\boxed{\text{Ex4}}$

1) D'après le tableau de variation de f' on a :

x	-2		-1		2
Signe de f'		$+$	0	$-$	
Variation de f		$\nearrow$		$\searrow$	

donc maximum en -1

Réponse $\boxed{d}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ae^x+1}{e^x+2}$ avec $a>0$

FI du type $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ou $+\infty \times 0$.

$$\frac{ae^x+1}{e^x+2} = \frac{\cancel{e^x}\left(a+\frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ae^x+1}{e^x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}} = \frac{a+\frac{1}{+\infty}}{1+\frac{2}{+\infty}} = \frac{a}{1} = \boxed{a}$$

3) $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ Réponse $\boxed{b}$

$$g'(x) = \frac{e^{-x}\times(-1)\times x - e^{-x}\times 1}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$$

$$g'(1) = \frac{e^{-1}(-2)}{1} = -\frac{2}{e}$$ donc réponses a et b fausses.

Equation de la tangente $y = g'(1)(x-1)+g(1)$

$$y = -\frac{2}{e}(x-1) + e^{-1}$$

$$y = -\frac{2}{e}x + \frac{2}{e} + \frac{1}{e}$$

$$y = -\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}$$ Réponse d) fausse

on a $ey = -2x+3$

$ey + 2x - 3 = 0$ donc réponse $\boxed{a}$

4) $f(x) = 4\ln(3x)$

$f(2x) = 4\ln(3\times 2x) = 4\ln(6x)$

$= 4(\ln(6)+\ln(x)) = 4\ln(6) + 4\ln(x)$

$= f(2) + 4\ln(x) \neq f(2) + \ln(x)$

Réponse a fausse

$f(2x) = 4\ln(6x)$

$= 4\ln(2\times 3x) = 4\ln(2) + 4\ln(3x)$

$= \ln(2^4) + f(x) =$

$= \ln(16) + f(x)$ donc réponse $\boxed{b}$

$\boxed{\text{Ex4(2)}}$

5) $u_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\quad (= 1+q+q^2+\dots+q^n)$

Rmq: $u_0 = 1$ (a faux)

$$u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$

$$u_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$ Réponse c fausse

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$= \frac{3}{2}(1-0)$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$

$= \boxed{\frac{3}{2}}$ donc (u_n) converge

Réponse $\boxed{d}$