ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Mathématiques

Janvier 2023

Sujet 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Ce sujet est composé de 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 et comporte 4 exercices.

Exercice 1 — 5 points

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle]0 ; +∞[par : $g(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x}$

1. On note g' la fonction dérivée de g. Démontrer que pour tout réel $x \in\ ]0\ ;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{2-2\ln(x)}{x^2}$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur]0 ; +∞[dont on admet la limite en +∞ ainsi que les valeurs de $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.

x	0		1		e		$+\infty$
Variations de g	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{\mathrm{e}}$	↘	0

a. Justifier la limite en 0 et le sens de variation de g.

b. Interpréter graphiquement les limites de la fonction g.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur]0 ; +∞[.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x)=[\ln(x)]^2$

1. Démontrer que f est une primitive sur]0 ; +∞[de la fonction g.

2. A l'aide de la partie 1, étudier sur]0 ; +∞[:
a. la convexité de f ;
b. le sens de variation de f.

3. **a.** Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.

b. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle]0 ; e] :

$$[\ln(x)]^2 \geq \frac{2}{\mathrm{e}}x-1.$$

Exercice 2 — 7 points

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1.
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

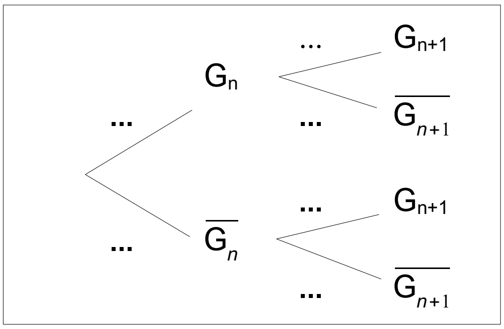
- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie »
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

1. **a.** Modéliser la situation pour les deux premières parties à l'aide d'un arbre pondéré faisant apparaître les évènements G_1 et G_2.

b. Montrer que p_2, la probabilité qu'il gagne la deuxième partie, est égale à 0,62.

c. Si le joueur gagne la deuxième partie, quelle est la probabilité qu'il ait perdu la première ?

2. Soit n un entier naturel non nul.



a. Après avoir recopié et complété l'arbre ci-contre à l'aide des données de l'énoncé, montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

c. Déterminer la limite de la suite (p_n).

d. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

3. On choisit au hasard 10 joueurs qui ont joué, indépendamment les uns des autres, deux parties à ce jeu. On rappelle que la probabilité qu'un joueur gagne la deuxième partie est égale à 0,62. On note N le nombre de joueurs parmi les 10 ayant gagné la deuxième partie.

Pour chaque probabilité demandée il est attendu une expression de la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire N ? Justifier.

b. Calculer la probabilité que 6 joueurs parmi les 10 aient gagné la deuxième partie.

c. Quelle est la probabilité qu'au plus 9 joueurs aient gagné la deuxième partie.

d. Calculer l'espérance E(N) de la variable aléatoire N et interpréter cette espérance.

Exercice 3 **4 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$.

1. La suite (u_n) est elle géométrique ? Justifier.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq e^2$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
b. La suite (u_n) converge-t-elle ? Justifier.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n) - 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$

c. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

4. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 4 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère une fonction f définie et dérivable sur [-2 ; 2]. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 2] est donné par :

x	-2		-1		0		2
variations de f'	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

a. f est décroissante sur]-2 ; 0]

b. f est croissante sur]-2 ; 0]

c. f admet un minimum en -1

d. f admet un maximum en -1

2. a étant un réel strictement positif, que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a e^x + 1}{e^x + 2}$?

a. $+\infty$

b. a

c. $\dfrac{a+1}{2}$

d. $\dfrac{1}{2}$

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$, et (T) la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.

a. Le coefficient directeur de (T) est $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

b. Le coefficient directeur de (T) est nul

c. (T) a pour équation $ey + 2x - 3 = 0$

d. (T) a pour équation $y = -\dfrac{2}{\mathrm{e}}x + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

4. On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = 4\ln(3x)$.
Pour tout réel x de l'intervalle]0 ; +∞[, on a :

a. $f(2x) = f(2) + f(x)$

b. $f(2x) = f(x) + \ln(16)$

c. $f(2x) = \ln(6x^4)$

d. $f(2x) = 2f(x)$

5. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$

a. $u_0 = 0$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

d. La suite (u_n) converge.