Ex 1

1) Epreuve de Bernoulli : on recoit un colis
Succès : le colis est en mauvais état.
$P(S) = p = 0{,}07$

30 épreuves identiques et indépendantes.
On note X le nombre de colis en mauvais état.
X suit la loi $\mathcal{B}(30 ; 0{,}07)$

2) $E(X) = np = 30 \times 0{,}07 = 2{,}1$
On peut s'attendre à recevoir 2 colis en mauvais état.

3) $P(X=3) = \binom{30}{3} \times p^3 \cdot q^{27}$ $\quad q = 1-p = 1-0{,}07 = 0{,}93$
$= \binom{30}{3} \times 0{,}07^3 \times 0{,}93^{27}$
$\simeq \boxed{0{,}196}$

4) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}93^{30}$
$\simeq \boxed{0{,}887}$

Ex 2

$n \geq 1 \quad u_n = \frac{n}{n^2+1}$

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \times 0$ FI

$\frac{n}{n^2+1} = \frac{n \times 1}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+0} = \boxed{1}$

2) $n \geq 1 \quad V_n = 1 - \frac{5}{u_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 1 - \frac{5}{0^+} = 1 - 5(+\infty) = \boxed{-\infty}$

$\forall n \geq 1 \quad u_n \geq 0$

Ex 3

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} -4n^2+n = -\infty + \infty$ FI
$= \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(-4+\frac{n}{n^2}\right)$
$= \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(-4+\frac{1}{n}\right) = +\infty(-4) = \boxed{-\infty}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+n}{2+\sqrt{n}} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \times 0$ FI

$\frac{\sqrt{n}+n}{2+\sqrt{n}} = \frac{\cancel{\sqrt{n}}\left(1+\frac{n}{\sqrt{n}}\right)}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+1\right)} = \frac{1+\sqrt{n}}{\frac{2}{\sqrt{n}}+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{\frac{2}{\sqrt{n}}+1} = \frac{+\infty}{1} = \boxed{+\infty}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3\times 2^n+1}{3^n-1} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \times 0$ FI

car $2>1$ et $3>1$

$\frac{3\times 2^n+1}{3^n-1} = \frac{2^n\left(3+\frac{1}{2^n}\right)}{3^n\left(1-\frac{1}{3^n}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{3+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{3^n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3\times 2^n+1}{3^n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{3+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{3^n}}$
$= 0 \times \frac{3}{1}$
$= \boxed{0}$ car $0 < \frac{2}{3} < 1$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{5^{n+1}}{4^n}$

$1 - \frac{5^{n+1}}{4^n} = 1 - \frac{5^n \times 5}{4^n} = 1 - \frac{5^n}{4^n} \times 5 = 1 - \left(\frac{5}{4}\right)^n \times 5$

$\frac{5}{4} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{5^{n+1}}{4^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{5}{4}\right)^n \times 5$
$= 1 - (+\infty) = \boxed{-\infty}$

$\boxed{\text{Ex 4}}$ (U_n) géométrique de raison 0,7 de premier terme $U_0 = 3$

1a) $U_n = U_0 \times q^n$

$$\boxed{U_n = 3 \times 0{,}7^n}$$

b) $0 < 0{,}7 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 3 \times 0 = 0$

2a) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$$S_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - 0{,}7^{n+1}}{1 - 0{,}7}$$

$$S_n = 3 \times \frac{1 - 0{,}7^{n+1}}{0{,}3} = \frac{3}{0{,}3} \times (1 - 0{,}7^{n+1})$$

$$\boxed{S_n = 10\,(1 - 0{,}7^{n+1})}$$

b) $\lim_{n \to +\infty} 0{,}7^{n+1} = \lim_{n \to +\infty} 0{,}7^n = 0$. car $0 < 0{,}7 < 1$

donc $\lim_{n \to +\infty} S_n = 10 \times (1) = \boxed{10}$