DM Calculs 3

Ex 1 $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n+4} \end{cases}$

1) $u_1 = 3 - \dfrac{10}{u_0+4} = 3 - \dfrac{10}{9} = \dfrac{27-10}{9} = \boxed{\dfrac{17}{9}}$

2) $u_{n+1} - u_n = 3 - \dfrac{10}{u_n+4} - u_n = \dfrac{3(u_n+4) - 10 - u_n(u_n+4)}{u_n+4}$

$= \dfrac{3u_n + 12 - 10 - u_n^2 - 4u_n}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4}$

On étudie le signe de $-x^2 - x + 2$.

$\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9$

$x_1 = \dfrac{1-3}{-2} = 1$ $\quad x_2 = \dfrac{4}{-2} = -2$ $\quad a = -1 < 0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x^2 - x + 2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \geq 1$ donc $-u_n^2 - u_n + 2 \leq 0$

donc $\boxed{u_{n+1} - u_n \leq 0}$

Ex 2 $h(x) = (x-1)e^{-2x} + 1$

1) $h(x) - x = (x-1)e^{-2x} + 1 - x$

$= -(1-x)e^{-2x} + (1-x)$

$= (1-x)(-e^{-2x} + 1)$

$\boxed{h(x) - x = (1-x)(1-e^{-2x})}$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-2x} \geq 1 - 2x$

$h(x) - x = (1-x)(1-e^{-2x})$

Si $x \in [0,1]$ alors $x \leq 1$ donc $\boxed{1 - x \geq 0}$

on a $e^{-2x} \geq 1 - 2x$

donc $-e^{-2x} \leq -1 + 2x$

$\boxed{1 - e^{-2x} \leq 2x.}$

Par multiplication par $1-x$ qui est positif, on a :

$(1-x)(1-e^{-2x}) \leq 2x(1-x)$

et donc $h(x) - x \leq 2x - 2x^2$ $\quad$ CQFD

Ex 3 $f(x) = e^{-2x} - 1 + 2x$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -2e^{-2x} + 2$

$f'(x) = 0 \iff -2e^{-2x} + 2 = 0$

$\iff 2(-e^{-2x} + 1) = 0.$

$\iff e^{-2x} = 1$

$\iff -2x = 0$

$\iff x = 0.$

$f'(x) > 0 \iff -2e^{-2x} + 2 > 0$ $\quad$) : 2 > 0.

$\iff -e^{-2x} + 1 > 0$

$\iff -e^{-2x} > -1$

$\iff e^{-2x} < 1$ $\quad$) ln strictement $\nearrow$

$\iff -2x < 0$

$\iff x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(0) = e^0 - 1 + 0 = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) \geq 0$

et donc $\quad e^{-2x} - 1 + 2x \geq 0$

$e^{-2x} \geq 1 - 2x$

CQFD