Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$\begin{cases} U_{n+1} & = & 3 - \dfrac{10}{U_n + 4} \\ U_0 & = & 5 \end{cases}$$

On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$$

1. **a.** Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme V_0.

   b. Exprimer V_n en fonction de n.

   En déduire que pour tout entier naturel n, $V_n \neq 1$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n = \dfrac{2V_n + 1}{1 - V_n}$.

Exercice 2

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-2x} + 1$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $h(x) - x = (1-x)\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right)$

2. On admet que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-2x} \geqslant 1 - 2x$.

   Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $h(x) - x \leqslant 2x - 2x^2$.