Maths Compl.

Ex 1

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{2}$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \boxed{+\infty}$

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \boxed{-\infty}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

Ex 2

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x-2}{4-2x} = \dfrac{4}{0^-} = 4(-\infty) = \boxed{-\infty}$

$x > 2$

$-2x < -4$

$4 - 2x < 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x+1}{3e^x - x} = \dfrac{+\infty}{+\infty - \infty}$ FI

$\dfrac{e^x+1}{3e^x - x} = \dfrac{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(3 - \frac{x}{e^x}\right)}$

on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{e^x}}{3 - \frac{x}{e^x}} = \dfrac{1+0}{3-0} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-2)e^x = -\infty \times 0$ FI

$= \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x - 2e^x = 0 - 2(0) = \boxed{0}$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Ex 3

1) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$ donc $\mathcal{C}_g$ a pour asymptote la droite d'équation $\boxed{x = 0}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 4$ donc $\mathcal{C}_g$ a pour asymptote la droite d'équation $\boxed{y = 4}$

2) $x \in]0, +\infty[$ $\quad g(x) \leq h(x) \leq 4 + \dfrac{1}{x}$

* $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$ et $g(x) \leq h(x)$

donc d'après le théorème de comparaison $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty}$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 4 + \dfrac{1}{x} = 4$

avec $g(x) \leq h(x) \leq 4 + \dfrac{1}{x}$

donc d'après le théorème d'encadrement $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 4}$

Ex 4

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty + \infty$ FI

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(-1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)$

$= +\infty(-1 + 0 - 0) = \boxed{-\infty}$

2) $f'(x) = -3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \iff -3x^2 + 6x = 0$

$\iff x(-3x + 6) = 0$

$\iff x = 0$ ou $-3x + 6 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 2$

Signe de $-3x^2 + 6x$?

(trinôme avec $a = -3 < 0$)

x	$-\infty$		0		α		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+3$	$\searrow$	$-\infty$

$f(0) = -1$

$f(2) = -8 + 12 - 1 = +3$

$=$

4) Sur $[0, 2]$ f est continue car dérivable

f est strictement croissante

$f(0) = -1$ et $f(2) = 3$ $\quad 0 \in [-1; 3]$

D'après le TVI l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $[0, 2]$ que l'on note α

$\boxed{0{,}65 < \alpha < 0{,}66}$ car $f(0{,}65) < 0$ et $f(0{,}66) > 0$.