

Ex1 $A(3, 1, -5)$ (d): $\begin{cases} x = 3 - k \\ y = 4 + 2k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

1) a) $P_1: x - 3y + 2 = 0$

Vecteur normal à P_1 : $\vec{n}_1(1, -3, 0)$

Vecteur directeur de (d): $\vec{u}(-1, 2, 1)$

$\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 1 \times (-1) - 3 \times 2 + 0 \times 1 = -1 - 6 = -7 \neq 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{n}_1$ ne sont pas orthogonaux

donc (d) n'est pas parallèle à P_1

donc (d) coupe P_1

b) On cherche le point de (d) qui appartient à P_1

donc on cherche k tel que

$3 - k - 3(4 + 2k) + 2 = 0$

$3 - k - 12 - 6k + 2 = 0$

$-7k = 7$

$k = -1$

donc $x = 3 - k = 3 + 1 = 4$

$y = 4 + 2k = 4 - 2 = 2$

$z = 1 + k = 1 - 1 = 0$

$K(4, 2, 0)$

2) a) $P_2: -x + 4y + z = 0$

Vecteur normal à P_2 : $\vec{n}_2(-1, 4, 1)$

Vecteur normal à P_1 : $\vec{n}_1(1, -3, 0)$

$\begin{pmatrix} \frac{x}{x_1} = -\frac{1}{1} \\ \frac{y}{y_1} = \frac{4}{-3} \end{pmatrix} \neq$

les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires donc P_1 et P_2 ne sont pas parallèles donc ils sont sécants

b) On cherche la droite d'intersection de P_1 et P_2
donc on résout

$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ -x + 4y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -2 \\ -x + 4y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -2 \\ y = -z - 2 \end{cases}$
 $\begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3y \\ y = -z - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3(-z - 2) \\ y = -z - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 - 3z \\ y = -z - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 - 3k \\ y = -2 - k \\ z = k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

Ex2 $A(3, 1, -5)$ (d): $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = t - 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1) a) Vecteur directeur de (d): $\vec{u}(2, -2, 1)$

P est orthogonal à (d) donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à P

donc P a pour équation $2x - 2y + z + d = 0$

$A \in P$ donc $2 \times 3 - 2 \times 1 + (-5) + d = 0$

$6 - 2 - 5 + d = 0$

$d = 1$

donc P a pour équation $2x - 2y + z + 1 = 0$

b) $B(5, 5, -1)$

Montrons que B appartient à P et à (d)

① $2x - 2y + z + 1 = 10 - 10 - 1 + 1 = 0$

donc $B \in P$

② $\begin{cases} 5 = 2t + 1 \\ 5 = -2t + 3 \\ -1 = t - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 4 \\ 2t = 4 \\ t = +2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$

donc $B \in (d)$

2) $t \neq 2$ $M(2t+1, -2t+3, t-3)$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (5-1)^2 + (-1+5)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36}$

$AB = 6$

$AM = \sqrt{(2t+1-3)^2 + (-2t+3-1)^2 + (t-3+5)^2}$

$= \sqrt{(2t-2)^2 + (8-2t)^2 + (t+2)^2}$

$= \sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 64 - 32t + 4t^2 + t^2 + 4t + 4}$

(3)

$$AN = \sqrt{9t^2 - 36t + 72}$$

$$BN = \sqrt{(2t+1-5)^2 + (-2t+9-5)^2 + (t-3+1)^2}$$

$$BN = \sqrt{(2t-4)^2 + (4-2t)^2 + (t-2)^2}$$

$$= \sqrt{4t^2 - 16t + 16 + 16 - 16t + 4t^2 + t^2 - 4t + 4}$$

$$BN = \sqrt{9t^2 - 36t + 36}$$

$$\text{On a: } AB^2 + BN^2 = 36 + 9t^2 - 36t + 36 = 9t^2 - 36t + 72$$

$$\text{donc } AB^2 + BN^2 = AN^2$$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore
le triangle ABN est rectangle en B.

$$\begin{aligned} \text{b) } ABN \text{ isocèle en B} &\Leftrightarrow BN = BA \\ &\Leftrightarrow BN^2 = BA^2 \\ &\Leftrightarrow 9t^2 - 36t + 36 = 36 \\ &\Leftrightarrow 9t^2 - 36t = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - 4t = 0 \quad | :6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } ABN \text{ isocèle en B} &\Leftrightarrow t(t-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc pour } t = 0 & \quad \boxed{n_1(1, 9, -3)} \\ \text{pour } t = 4 & \quad \boxed{n_2(9, 1, 1)} \end{aligned}$$

(4)

$$\text{Ex 3 } A(3, 7, 0) \quad B(2, 0, -1) \quad C(0, 6, 1) \quad D(-1, 8, 1)$$

$$1) \overrightarrow{AB}(-1, -7, -1)$$

on note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 7 + 2k \\ y = 35 + 14k \\ z = 4 + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

(d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(2, 14, 2)$

$$\text{on a } \vec{u} = -2\overrightarrow{AB}$$

donc (AB) et (d) sont parallèles.

A appartient-il à (d)?

$$\begin{cases} 3 = 7 + 2k \\ 7 = 35 + 14k \\ 0 = 4 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -4 \\ 14k = -28 \\ 2k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

oui $A \in (d)$

donc (AB) et (d) sont confondues.

donc oui (AB) a pour représentation paramétrique celle donnée dans l'énoncé.

$$2) \overrightarrow{AB}(-1, -7, -1)$$

$$\overrightarrow{AC}(-3, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{AD}(-2, 1, 1)$$

$$a \overrightarrow{AC}(-3a, -a, a)$$

$$b \overrightarrow{AD}(-2b, b, b)$$

$$\overrightarrow{AB} = a \overrightarrow{AC} + b \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 2b = -1 \\ -a + b = -7 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = -7 \\ -3a - 2b = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 2b = -8 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 - b \\ b = -4 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$\text{donc } \boxed{\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}}$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires
et donc les points A, B, C, D sont coplanaires