Exercice 1

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

On admet que f et g sont dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$. On note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques de f et g dans un repère orthogonal du plan.

1. **a.** Calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   b. Donner une interprétation graphique du résultat.

2. Soit $h(x) = \ln\left(g(x)\right)$.

   a. Démontrer que h est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $h(x) = \dfrac{-1-2x\ln x}{x}$.

   c. Calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.

   d. En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0.

3. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(1-2x\right)}{x^4}$.

   b. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

   c. Déterminer les variations de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   d. Démontrer que l'équation $g(x) = 0{,}1$ a une unique solution sur $[1\ ;\ +\infty[$.

   On note α cette solution, donner un encadrement de α à 0,1 près.

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{4}U_n + \dfrac{3}{4}n + 1$

Partie A

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n < U_n < n + \dfrac{4}{3}$
2. En déduire que la suite (U_n) admet une limite que l'on précisera.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{3}{4}\left(n + \dfrac{4}{3} - U_n\right)$
4. En déduire que la suite (U_n) est croissante.
5. La suite (U_n) peut-elle être majorée ?

Partie B

Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - n$.

1. Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.
2. En déduire une expression de U_n en fonction de n, puis retrouver la limite de la suite (U_n) trouvée dans la partie A.