Ex1 $f(x) = e^{-x}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

1a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to 0} e^{X} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \times 1 = 0$

b) $\mathcal{C}_g$ a pour asymptote la droite d'équation $y = 0$ (en $+\infty$)

2) $h(x) = \ln(g(x))$

a) Pour $x \in]0,+\infty[$ $\quad g(x) > 0$ donc $\ln(g(x))$ existe donc h définie sur $]0,+\infty[$

b) $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln\left(e^{-1/x}\right)$

$= -\ln(x^2) - \frac{1}{x} = -2\ln x - \frac{1}{x}$

$$\boxed{h(x) = \frac{-1 - 2x\ln x}{x}}$$

c) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} -1 - 2x\ln x = -1 - 0 = -1$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1 - 2x\ln x}{x} = \frac{-1}{0^+} = \boxed{-\infty}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty}$

d) $h(x) = \ln(g(x))$

donc $g(x) = e^{h(x)}$

donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{h(x)} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$

$$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0}$$

3a) $g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ $\qquad u(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$g'(x) = \frac{-2x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2}$

$$\boxed{g'(x) = \frac{e^{-1/x}(-2x+1)}{x^4}}$$

b) $y = g'(1)(x-1) + g(1)$ $\qquad g'(1) = \frac{e^{-1}(-1)}{1} = -e^{-1} = \boxed{-\frac{1}{e}}$

$y = -\frac{1}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$ $\qquad g(1) = 1e^{-1} = \frac{1}{e}$

$y = -\frac{1}{e}x + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}$

$$\boxed{y = -\frac{1}{e}x + \frac{2}{e}}$$

c) $g'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-2x) = 0$ car $\forall x \in]0,+\infty[$ $e^{-\frac{1}{x}} \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et $x^4 \neq 0$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 0$ car $\forall x \in]0,+\infty[$ $e^{-\frac{1}{x}} > 0$

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ et $x^4 > 0$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	$-\infty$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} e^{-2} = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$

d) $g(1) = \frac{1}{1^2} e^{-\frac{1}{1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq 0{,}37$

x	1	α	$+\infty$
$g(x)$	$\frac{1}{e} \simeq 0{,}37$	$0{,}1$ $\searrow$	$-\infty$

Sur $[1,+\infty[$
- g est continue car dérivable
- g est strictement décroissante
- $g(1) = \frac{1}{e} \simeq 0{,}37$ $\qquad 0{,}1 \in \left]-\infty; \frac{1}{e}\right]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0{,}1$ a une unique solution dans $[1,+\infty[$ que l'on note α.

$$\boxed{2{,}6 < \alpha < 2{,}7}$$

car $g(2{,}6) \simeq 0{,}1007 > 0{,}1$

et $g(2{,}7) \simeq 0{,}095 < 0{,}1$

$\boxed{Ex2}$ $U_0 = 1$ $\forall n \geq 0$ $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1$

$\boxed{A}$ 1) Démontrer que pour tout $n \geq 0$ $n < U_n < n + \frac{4}{3}$

- Pour $n = 0$ $U_0 = 1$

$0 < U_0 < \frac{4}{3}$ donc vrai pour $n = 0$

- Soit $n \geq 0$ fixé quelconque tel que $n < U_n < n + \frac{4}{3}$

On va démontrer que $n+1 < U_{n+1} < n + 1 + \frac{4}{3}$

On a $n < U_n < n + \frac{4}{3}$

$\frac{1}{4}n < \frac{1}{4}U_n < \frac{1}{4}n + \frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}n + \frac{3}{4}n + 1 < \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1 < \frac{1}{4}n + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}n + 1$

$n + 1 < U_{n+1} < n + \frac{4}{3} < n + \frac{4}{3} + 1$

- Conclusion : $\forall n \geq 0$ $\boxed{n < U_n < n + \frac{4}{3}}$ CQFD

2) On a : $\forall n \geq 0$ $n < U_n$

avec $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

3) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1 - U_n$

$= -\frac{3}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1 = \frac{3}{4}\left(-U_n + n + \frac{4}{3}\right)$

4) D'après 1) $U_n < n + \frac{4}{3}$

donc $n + \frac{4}{3} - U_n > 0$.

donc $U_{n+1} - U_n > 0$

et donc (U_n) est croissante

5) La suite (U_n) est croissante. Si elle était majorée, elle serait convergente.

Or $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ donc (U_n) n'est pas majorée

Méthode 2 : $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ donc (U_n) n'est pas majorée.

$\boxed{B}$ $V_n = U_n - n$ $\forall n \geq 0$

1) $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1) = U_{n+1} - n - 1$

$V_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{1}{4}U_n - \frac{1}{4}n$

$= \frac{1}{4}(U_n - n)$

$\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n}$

(V_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$, de premier terme $V_0 = U_0 - 0 = 1$

2) $U_n = V_n + n$ avec $V_n = V_0 \times q^n$

$V_n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

donc $\boxed{U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + n}$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$