Ex1

1) $y' = -5y$ (de la forme $y' = ay$)

Solutions : $y(x) = k e^{-5x}$, $k \in \mathbb{R}$

2) $2y' + 3y = 0$

$\Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2} y$

Solutions $y(x) = k e^{-\frac{3}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$

3) $4y' - y = 0$ avec $y(0) = 6$

① $4y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{4} y$

Solutions : $y(x) = k e^{\frac{1}{4}x}$, $k \in \mathbb{R}$

② On cherche la solution qui vérifie $y(0) = 6$

donc $k e^0 = 6$

$k = 6$

Conclusion $y(x) = 6 e^{\frac{1}{4}x}$

4) $y' = 7y + 5$ (de la forme $y' = ay + b$)

Solutions : $y(x) = k e^{7x} - \frac{5}{7}$ $k \in \mathbb{R}$

5) $3y' - 2y = 1$

$\Leftrightarrow 3y' = 2y + 1$

$\Leftrightarrow y' = \frac{2}{3} y + \frac{1}{3}$ (de la forme $y' = ay + b$)

Solutions $y(x) = k e^{\frac{2}{3}x} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$

$y(x) = k e^{\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$ $k \in \mathbb{R}$

6) $5y' + 3y = 4$ avec $y(5) = 0$

① $5y' + 3y = 4$

$\Leftrightarrow 5y' = -3y + 4$

$\Leftrightarrow y' = -\frac{3}{5} y + \frac{4}{5}$ ($y' = ay + b$)

Solutions $y(x) = k e^{-\frac{3}{5}x} - \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}$

$y(x) = k e^{-\frac{3}{5}x} + \frac{4}{3}$

② On cherche la solution telle que $y(5) = 0$

donc $k e^{-3} + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow k e^{-3} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3} e^{3}$

Donc $\boxed{y(x) = -\frac{4}{3} e^{3} e^{-\frac{3}{5}x} + \frac{4}{3}}$

Ex2

$10 v'(t) + v(t) = 30$ $v(0) = 0$

v est solution de l'équation différentielle $10y' + y = 30$.

or $10y' + y = 30 \Leftrightarrow 10y' = -y + 30$

$\Leftrightarrow y' = -\frac{1}{10} y + 3$.

donc $v(t) = k e^{-\frac{1}{10}t} - \frac{3}{-\frac{1}{10}}$

$v(t) = k e^{-\frac{1}{10}t} + 30$. avec $k \in \mathbb{R}$.

$v(0) = 0$ donc $k e^0 + 30 = 0$

$\Leftrightarrow k + 30 = 0$

$\Leftrightarrow k = -30$

Conclusion $\boxed{v(t) = -30 e^{-\frac{1}{10}t} + 30}$.

Ex3

$f'(t) + \frac{1}{2} f(t) = 10$.

donc f est solution de $y' + \frac{1}{2} y = 10$.

or $y' + \frac{1}{2} y = 10 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2} y + 10$.

donc f solution de $y' = -\frac{1}{2} y + 10$.

donc $f(t) = k e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{10}{-\frac{1}{2}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$f(t) = k e^{-\frac{1}{2}t} + 20$.

Pour $t = 0$, la température est de 220°C donc

$f(0) = 220$

et donc $k e^0 + 20 = 220$

$\Leftrightarrow k + 20 = 220$

$\Leftrightarrow k = 200$.

Conclusion $\boxed{f(t) = 200 e^{-\frac{1}{2}t} + 20}$

2) $f(t) = 50 \Leftrightarrow 200 e^{-\frac{1}{2}t} + 20 = 50$

$\Leftrightarrow 200 e^{-\frac{1}{2}t} = 30$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{3}{20}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}t = \ln\left(\frac{3}{20}\right)$

$\Leftrightarrow t = -2 \ln\left(\frac{3}{20}\right)$ $t \simeq 3{,}8$

$t \simeq 3{,}8$ h

$t \simeq 3$ h $+ 0{,}8$ h

$t \simeq 3$ h $+ 0{,}8 \times 60$ min

$t \simeq 3$ h $+ 48$ min.

Réponse : Au bout de 3 heures et 48 minutes la température sera de 50°C

Ex 4

1) (E) : $4y' - 5y = 0$

$\Leftrightarrow 4y' = 5y$

$\Leftrightarrow y' = \frac{5}{4}y$

Solutions : $\boxed{y(x) = k e^{\frac{5}{4}x}, \ k \in \mathbb{R}}$

2) (E') $4y' - 5y = 2x - 3$.

a) On cherche la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ solution de (E')

On a : f solution de (E') $\Leftrightarrow 4f'(x) - 5f(x) = 2x - 3$

$\Leftrightarrow 4a - 5(ax+b) = 2x - 3$

$\Leftrightarrow 4a - 5ax - 5b = 2x - 3$

$\Leftrightarrow -5ax + 4a - 5b = 2x - 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5a = 2 \\ 4a - 5b = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ 5b = 4a + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ 5b = -\frac{8}{5} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ 5b = \frac{7}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = \frac{7}{25} \end{cases}$

donc $\boxed{f(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{25}}$

b) g solution de (E') $\Leftrightarrow \boxed{4g'(x) - 5g(x) = 2x - 3}$ (1)

$g - f$ solution de (E) $\Leftrightarrow 4(g-f)'(x) - 5(g-f)(x) = 0$

$\Leftrightarrow 4(g'(x) - f'(x)) - 5(g(x) - f(x)) = 0$

$\Leftrightarrow 4g'(x) - 4f'(x) - 5g(x) + 5f(x) = 0$

$\Leftrightarrow 4g'(x) - 5g(x) = 4f'(x) - 5f(x)$

$\Leftrightarrow \boxed{4g'(x) - 5g(x) = 2x - 3}$ (2)

car f solution de (E')

et donc $4f'(x) - 5f(x) = 2x - 3$

Conclusion :

D'après (1) et (2) on a :

g solution de (E') $\Leftrightarrow g - f$ solution de (E)

c) g solution de (E') $\Leftrightarrow g - f$ solution de (E)

$\Leftrightarrow g(x) - f(x) = k e^{\frac{5}{4}x}, \ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow g(x) = k e^{\frac{5}{4}x} + f(x), \ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \boxed{g(x) = k e^{\frac{5}{4}x} - \frac{2}{5}x + \frac{7}{25}}, \ k \in \mathbb{R}$

Ex 5 (E) $y' + y = e^{-x}$

1) $u(x) = x e^{-x}$

Démontrer que u est solution de (E)

$u'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times e^{-x} \times (-1)$

$u'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$

$u'(x) + u(x) = e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}$

donc u est solution de (E)

2) Résoudre $y' + y = 0$ noté (E')

$y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$

Solutions de (E') : $\boxed{y(x) = k e^{-x}, \ k \in \mathbb{R}}$

3) Démontrer que v solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E')

On a : v solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ v'(x) + v(x) = e^{-x}$

$v - u$ solution de (E') $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (v-u)'(x) + (v-u)(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, v'(x) - u'(x) + v(x) - u(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, v'(x) + v(x) = e^{-x}$

(d'après u solution de (E))

Conclusion : v solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ v'(x) + v(x) = e^{-x}$

et $v - u$ solution de (E') $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ v'(x) + v(x) = e^{-x}$

donc v solution de (E) $\Leftrightarrow v - u$ solution de (E')

4) En déduire toutes les solutions de (E)

v solution de (E) $\Leftrightarrow v - u$ est solution de (E')

$\Leftrightarrow (v-u)(x) = k e^{-x}$ (d'après 2)

$\Leftrightarrow v(x) - u(x) = k e^{-x}$ $k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow v(x) = k e^{-x} + u(x)$

$\Leftrightarrow v(x) = k e^{-x} + x e^{-x}$

Les solutions de (E) sont donc :

$v(x) = k e^{-x} + x e^{-x}$ $k \in \mathbb{R}$

5) Déterminer g solution de (E) telle que $g(0) = 2$

g est solution de (E) donc $g(x) = k e^{-x} + x e^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$g(0) = 2$ donc $k e^{0} + 0 = 2$

$k = 2$

Conclusion $\boxed{g(x) = 2e^{-x} + x e^{-x}}$

$\boxed{\text{Ex 6}}$ (E) $y' = \frac{1}{20}\, y(10-y)$

Soit f ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et on pose $g = \frac{1}{f}$

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de $y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{20}$.

On a : g solution de $y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{20}$.

$\Leftrightarrow g'(t) = -\frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{20}$.

$\Leftrightarrow \frac{-f'(t)}{(f(t))^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{f(t)} + \frac{1}{20}$

$\Leftrightarrow -f'(t) = (f(t))^2\left(-\frac{1}{2f(t)} + \frac{1}{20}\right)$

$\Leftrightarrow -f'(t) = -\frac{f(t)}{2} + \frac{1}{20}(f(t))^2$

$\Leftrightarrow \boxed{f'(t) = \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{20}(f(t))^2}$ (1)

or $g(t) = \frac{1}{f(t)}$

donc $g'(t) = \frac{-f'(t)}{(f(t))^2}$

et f solution de (E) $\Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{20}f(t)(10 - f(t))$

$\Leftrightarrow f'(t) = \frac{10}{20}f(t) - \frac{1}{20}(f(t))^2$

$\Leftrightarrow \boxed{f'(t) = \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{20}(f(t))^2}$ (2)

Conclusion : D'après (1) et (2) on a :

g solution de $y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{20}$

$\Leftrightarrow f$ solution de (E)