Equations différentielles

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = -5y$
2. $2y' + 3y = 0$
3. $4y' - y = 0$ avec $y(0) = 6$
4. $y' = 7y + 5$
5. $3y' - 2y = 1$
6. $5y' + 3y = 4$ avec $y(5) = 0$

Exercice 2 Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue.

On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.

On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle : $10v'(t) + v(t) = 30$.

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

Déterminer $v(t)$.

Exercice 3 La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t.

f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle : $f'(t) + \dfrac{1}{2}f(t) = 10$

La température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t en heures.

Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220°C.

Exercice 4

1. Soit (E) l'équation différentielle $4y' - 5y = 0$

   Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. On note (E') l'équation différentielle $4y' - 5y = 2x - 3$
   - **a.** Déterminer la fonction affine f solution particulière de l'équation (E').
   - **b.** Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est une solution de (E).
   - **c.** En déduire les solutions de (E').

Exercice 5 On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E′) : $y' + y = 0$.

   Résoudre l'équation différentielle (E′).
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E′).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Exercice 6 On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \dfrac{1}{20}y(10 - y)$.

Soit f une fonction ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et on pose $g = \dfrac{1}{f}$.

Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si g est solution de $y' = -\dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{20}$.