

Exercice 1**2 points**

Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = 1 - x$.

Déterminer $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$. Donner une expression réduite du résultat.

Exercice 2**4 points**

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$g(x) = \sqrt{e^x + x}$$

$$h(x) = e^{\frac{1}{4x}}$$

$$p(x) = (4x^2 - x + 2)^3$$

$$f(x) = \frac{5}{(x^4 + 3)^3}$$

Exercice 3**2 points**

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{\sqrt{x}} + 1$.

Déterminer la primitive F sur \mathbb{R} de la fonction f telle que $F(1) = 1$.

Exercice 4**8 points**

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 80 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 82 % réussissent le test de solidité ;
- 5 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

Tous les résultats seront arrondis au millième.

- Représenter la situation par un arbre pondéré. Cet arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
 - Démontrer que $P_{\bar{F}}(\bar{S}) = 0,25$.
 - Démontrer que $P(S) = 0,806$.
 - Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.
- Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis de côté et ne rapportent rien, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

 - Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B .
 - Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B .
 - Quel bénéfice peut-on prévoir pour la vente de 100 objets ?
- On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 4 jouets.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité.

On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

 - Justifier que X suit une loi binomiale.

Répondre aux questions suivantes en justifiant les réponses.

- Calculer la probabilité que 3 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.
- Calculer la probabilité qu'au moins 1 jouet de ce lot subisse avec succès le test de solidité.