Calculatrice interdite

Le soin apporté et la rédaction seront pris en compte dans la notation

Exercice 1 .... **3 points**

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x}{3}$ pour $x > 0$

   Dériver la fonction f.

2. Soit $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

   Le plan étant muni d'un repère orthonormé, déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Exercice 2 ________ **4 points**

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{2 + 3U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = 1 + \dfrac{2}{U_n}$.

1. Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison 3.
2. Exprimer V_n en fonction de n puis en déduire U_n en fonction de n.

Exercice 3 .... **4 points**

Soit (W_n) la suite définie par : $\begin{cases} W_0 & = & 0 \\ W_{n+1} & = & \dfrac{1}{2 - W_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $W_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 4 ________ **9 points**

1. Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 4$ et pour tout $n \geqslant 0$ par $U_{n+1} = \dfrac{3}{2}U_n - 5$.
   - **a.** Calculer U_1 et U_2.
   - **b.** Justifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On désigne par (V_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $V_n = U_n - 10$.
   - **a.** Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.
   - **b.** En déduire l'expression de V_n en fonction de n puis l'expression de U_n en fonction de n.
   - **c.** Calculer $V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ puis en déduire $U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$