$\boxed{\text{Ex 1}}$

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x}{3}$ pour $x > 0$

$f(x) = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{x} - x\right)$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)}$$

2) $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 2 \times \dfrac{1}{1+x^2}$

$f'(x) = 2 \times \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} = \boxed{\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}}$

Equation de la tangente au point d'abscisse 1

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $\qquad f(1) = \dfrac{2}{2} = 1$

$y = -1(x-1) + 1$ $\qquad f'(1) = \dfrac{-4}{4} = -1$

$\boxed{y = -x + 2}$

$\boxed{\text{Ex 2}}$ $U_0 = 2$ $\qquad U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{2+3U_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad V_n = 1 + \dfrac{2}{U_n}$

1) $V_{n+1} - V_n = 1 + \dfrac{2}{U_{n+1}} - \left(1 + \dfrac{2}{U_n}\right)$

$= 1 + \dfrac{2}{\dfrac{2U_n}{2+3U_n}} - 1 - \dfrac{2}{U_n}$

$= \cancel{1} + \dfrac{\cancel{2}(2+3U_n)}{\cancel{2}U_n} - \cancel{1} - \dfrac{2}{U_n}$

$= \dfrac{2+3U_n}{U_n} - \dfrac{2}{U_n} = \dfrac{2 + 3U_n - 2}{U_n} = +\dfrac{3U_n}{U_n}$

$= 3$

donc $V_{n+1} - V_n = 3$

donc $\boxed{V_{n+1} = V_n + 3}$

donc (V_n) est arithmétique de raison 3

et de premier terme $V_0 = 1 + \dfrac{2}{U_0}$

$V_0 = 1 + 1$

$\boxed{V_0 = 2}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad V_n = V_0 + nr$

$\boxed{V_n = 2 + 3n}$

Connaissant V_n, on en déduit U_n d'après la relation $V_n = 1 + \dfrac{2}{U_n}$

$\dfrac{2}{U_n} = V_n - 1$

$\dfrac{U_n}{2} = \dfrac{1}{V_n - 1}$

$\dfrac{U_n}{2} = \dfrac{1}{2+3n-1}$

$\dfrac{U_n}{2} = \dfrac{1}{1+3n}$

$\boxed{U_n = \dfrac{2}{1+3n}}$

$\boxed{\text{Ex 3}}$ $W_0 = 0$

$W_{n+1} = \dfrac{1}{2-W_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $W_n = \dfrac{n}{n+1}$

① Pour $n = 0$

$W_0 = 0$ donc l'égalité est vraie pour $n=0$

$\dfrac{n}{n+1} = 0$

② Soit $n \geq 0$ tel que $W_n = \dfrac{n}{n+1}$ (HR)

On va démontrer que $W_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$

D'après l'énoncé $W_{n+1} = \dfrac{1}{2-W_n}$

D'après l'HR $W_{n+1} = \dfrac{1}{2 - \frac{n}{n+1}}$

$= \dfrac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}}$

$= \dfrac{n+1}{2(n+1)-n}$

$= \dfrac{n+1}{2n+2-n}$

$= \dfrac{n+1}{n+2}$

CQFD

③ D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $n \geq 0$ $W_n = \dfrac{n}{n+1}$

$\boxed{\text{Ex 4}}$ $U_0 = 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \dfrac{3}{2} U_n - 5$

1 a) $U_1 = \dfrac{3}{2} U_0 - 5 = \dfrac{3}{2} \times 4 - 5 = 6 - 5 = \boxed{1}$

$U_2 = \dfrac{3}{2} U_1 - 5 = \dfrac{3}{2} - 5 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{10}{2} = \boxed{-\dfrac{7}{2}}$

b) * $U_1 - U_0 = 1 - 4 = -3$

$U_2 - U_1 = -\dfrac{7}{2} - 1 = -\dfrac{7}{2} - \dfrac{2}{2} = -\dfrac{9}{2}$

$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ donc (U_n) n'est pas arithmétique

* $\dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{-\frac{7}{2}}{1} = -\dfrac{7}{2}$

$\dfrac{U_1}{U_0} \neq \dfrac{U_2}{U_1}$ donc (U_n) n'est pas géométrique.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = U_n - 10$

a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 10$

$= \dfrac{3}{2} U_n - 5 - 10 = \dfrac{3}{2} U_n - 15$

$= \dfrac{3}{2}\left(U_n - \dfrac{15}{\frac{3}{2}}\right)$

$= \dfrac{3}{2}(U_n - 10)$

$\boxed{V_{n+1} = \dfrac{3}{2} V_n}$

donc (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 10$

$V_0 = 4 - 10$

$\boxed{V_0 = -6}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = V_0 \times q^n$

$V_n = -6 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

Connaissant V_n on en déduit U_n d'après la relation $V_n = U_n - 10$

donc $U_n = V_n + 10$

$\boxed{U_n = -6 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 10}$

c) $V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ car (V_n) géométrique

c) (V_n) géométrique donc

$$V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= -6 \times \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}$$

$$= -6 \times \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}}$$

$$= -6\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) \times (-2)$$

$$= \boxed{12\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

$$U_0 + U_1 + \dots + U_n = (V_0+10) + (V_1+10) + \dots + (V_n+10)$$

$$= V_0 + V_1 + \dots + V_n + \underbrace{10 + 10 \dots + 10}$$

$$= \boxed{12\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) + 10(n+1)}$$