Ex 1

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2-7n = \lim\limits_{n\to+\infty} n(3n-7) = +\infty(+\infty) = \boxed{+\infty}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2-3n}{n^3-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n^2}(4-\frac{3}{n})}{\cancel{n^2}(n-\frac{1}{n})} = \dfrac{4-0}{+\infty-0} = \dfrac{4}{+\infty} = \boxed{0}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n-1}{2^n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n(5-\frac{1}{5^n})}{2^n(1+\frac{3}{2^n})}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n \dfrac{5-\frac{1}{5^n}}{1+\frac{3}{2^n}} = +\infty \dfrac{5-0}{1+0} = \boxed{+\infty}$

car $\frac{5}{2} > 1$, $2>1$, $5>1$

Ex 2

$U_1 = 500$.

1) $U_2 = 500 \times 1{,}02 = \boxed{510}$. La prime la 2ème année est de 510 €

2) $U_{n+1} = U_n \times 1{,}02$

3) (U_n) est géométrique de raison 1,02 de premier terme $U_1 = 500$

a) $U_{20} = U_1 \times q^{19} = 500 \times 1{,}02^{19}$
$\simeq 728$

La 20ème année la prime est de 728 €

b) $S = U_1 + U_2 + \dots + U_{20} = U_1 \times \dfrac{1-q^{20}}{1-q}$

$= 500 \times \dfrac{1-1{,}02^{20}}{1-1{,}02}$

$= \dfrac{500}{0{,}02}(1-1{,}02^{20})$

$\simeq \boxed{12149}$

La somme sur 20 ans est de 12 149 €

Ex 3 $q = 0{,}7$ $\quad u_0 = 4$

1) $\boxed{U_{n+1} = U_n \times 0{,}7}$

$U_n = U_0 \times q^n$

$\boxed{U_n = 4 \times 0{,}7^n}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4 \times 0{,}7^n = 4 \times 0 = \boxed{0}$

car $0 < 0{,}7 < 1$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad V_n > U_n + 2\sqrt{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n + 2\sqrt{n} = 0 + \infty = +\infty$

D'après le théorème de comparaison $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty}$

Ex 4 $U_0 = 0$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{U_n^2+12}$

1) $U_1 = \frac{1}{2}\sqrt{U_0^2+12} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{4\times3} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \boxed{\sqrt{3}}$

2) $V_n = U_n^2 - 4$

a) $V_{n+1} = U_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{U_n^2+12}\right)^2 - 4$

$= \frac{1}{4}(U_n^2+12) - 4 = \frac{1}{4}U_n^2 + 3 - 4$

$= \frac{1}{4}U_n^2 - 1$

$= \frac{1}{4}(U_n^2 - 4)$

$\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n}$

donc (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$, de 1er terme $V_0 = U_0^2 - 4$

$\boxed{V_0 = -4}$

b) $V_n = V_0 \times q^n$

$\boxed{V_n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

3) Connaissant V_n, on en déduit U_n d'après la relation.

$V_n = U_n^2 - 4$

$U_n^2 = V_n + 4$

$U_n = \sqrt{V_n+4}$ car $U_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$U_n = \sqrt{-4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4} = \sqrt{4\left(-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1\right)}$

$\boxed{U_n = 2\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$