Calculatrice interdite - Durée 2 heures

Exercice 1 — 9 points

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 10$, $U_1 = 9$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+2} = \dfrac{3}{2}U_{n+1} - \dfrac{1}{2}U_n$

1. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = 2U_{n+1} - U_n$.
   - **a.** Démontrer que (V_n) est une suite constante.
   - **b.** En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 4$
2. - **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, $5 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$
   - **b.** En déduire que la suite (U_n) est convergente.
3. On considère la suite (W_n) définie pour tout entier naturel n par $W_n = U_n - 8$
   - **a.** Démontrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   - **b.** En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 8$
   - **c.** Calculer la limite de la suite (U_n).

Exercice 2 — 2 points

Déterminer la fonction f telle que pour tout réel x, $2f'(x) + \dfrac{3}{4}f(x) = 1$ et $f(0) = 3$

Exercice 3 — 4 points

On considère l'équation différentielle : $y' = 2y(3-y)$ (E)

On suppose qu'il existe une fonction f solution de (E) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie $f(0) = 4$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

1. Démontrer que g est solution de $y' = -6y + 2$ (E′)
2. Résoudre (E′)
3. En déduire une expression de la fonction f.

Exercice 4 — 5 points

On considère l'équation différentielle : $2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ (E′)

1. Résoudre l'équation différentielle : $2y' + y = 0$ (E)
2. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right)$ soit solution de (E′)
3. En déduire les solutions de (E′).
4. Existe-t-il une solution de (E′) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point A(2 ; 1) ?