Ex 1 $U_0 = 10 \quad U_1 = 9 \quad \forall n \geq 0 \quad U_{n+2} = \frac{3}{2} U_{n+1} - \frac{1}{2} U_n$

1) $V_n = 2U_{n+1} - U_n$

a) $V_{n+1} = 2U_{n+2} - U_{n+1}$

$= 2\left(\frac{3}{2} U_{n+1} - \frac{1}{2} U_n\right) - U_{n+1}$

$= 3U_{n+1} - U_n - U_{n+1}$

$= 2U_{n+1} - U_n$

$\boxed{V_{n+1} = V_n}$ $\forall n \geq 0$ donc (V_n) est constante

On a $V_0 = 2U_1 - U_0 = 18 - 10$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{V_n = 8}$

b) $V_n = 2U_{n+1} - U_n$

donc $2U_{n+1} - U_n = 8$

$2U_{n+1} = 8 + U_n$

$U_{n+1} = 4 + \frac{1}{2} U_n$

$\boxed{U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 4}$

2a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$

x $5 \leq U_{n+1} \leq U_n$

① Pour $n = 0$ $\quad U_0 = 10$, $U_1 = 9$ donc $5 \leq 9 \leq 10$

$5 \leq U_1 \leq U_0$

donc vrai pour $n = 0$

② Soit $n \geq 0$ tel que $5 \leq U_{n+1} \leq U_n$

On va démontrer que $5 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

On a $5 \leq U_{n+1} \leq U_n$ (HR)

$\frac{5}{2} \leq \frac{1}{2} U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n \quad \times \frac{1}{2}$

$\frac{5}{2} + 4 \leq \frac{1}{2} U_{n+1} + 4 \leq \frac{1}{2} U_n + 4$

$\frac{13}{2} \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

or $5 = \frac{10}{2}$ donc $5 \leq \frac{13}{2}$ et donc

$5 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$ CQFD

Ex 2 $2f'(x) + \frac{3}{4} f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(0) = 3$

f est donc solution de $2y' + \frac{3}{4} y = 1$

On a $2y' + \frac{3}{4} y = 1$

$\Leftrightarrow 2y' = 1 - \frac{3}{4} y$

$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} y$

$\Leftrightarrow y' = -\frac{3}{8} y + \frac{1}{2}$ (du type $y' = ay + b$)

Ces équations différentielles ont pour solutions :

$y(x) = Ce^{-\frac{3}{8}x} - \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}}$

$y(x) = Ce^{-\frac{3}{8}x} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{3}$

$\boxed{y(x) = Ce^{-\frac{3}{8}x} + \frac{4}{3}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

donc $f(x) = Ce^{-\frac{3}{8}x} + \frac{4}{3}$

D'après $f(0) = 3$ on a donc $Ce^0 + \frac{4}{3} = 3$

$C = 3 - \frac{4}{3}$

$C = \frac{5}{3}$

donc $\boxed{f(x) = \frac{5}{3} e^{-\frac{3}{8}x} + \frac{4}{3}}$

③ D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $n \geq 0$ $\quad 5 \leq U_{n+1} \leq U_n$.

b) D'après $\forall n \geq 0 \quad 5 \leq U_{n+1} \leq U_n$

on a : $\forall n \geq 0 \quad U_{n+1} \leq U_n$

donc (U_n) décroissante

et on a : $\forall n \geq 0 \quad 5 \leq U_n$

donc (U_n) minorée par 5

La suite (U_n) est décroissante et minorée donc elle converge

3) $\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n = U_n - 8$

a) $W_{n+1} = U_{n+1} - 8 = \frac{1}{2}U_n + 4 - 8$

$= \frac{1}{2}U_n - 4$

$= \frac{1}{2}(U_n - 8)$

$$\boxed{W_{n+1} = \frac{1}{2} W_n}$$

donc (W_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $W_0 = U_0 - 8$

$W_0 = 10 - 8$

$$\boxed{W_0 = 2}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n = W_0 \times q^n$

$$\boxed{W_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n = U_n - 8$ donc $U_n = W_n + 8$

donc $\boxed{U_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8}$

c) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0 + 8 = 8$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 8}$$

$\boxed{\text{Ex3}}$ $(E) \quad y' = 2y(3-y)$

f solution de (E) avec $f(1) = 2$

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$

1) On veut démontrer que g est solution de (E') $y' = -6y + 2$

donc on veut démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$

$g'(x) = -6g(x) + 2$

$g'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$

or f est solution de (E)

donc $f'(x) = 2f(x)(3 - f(x))$

donc

$g'(x) = \frac{-2f(x)(3-f(x))}{(f(x))^2}$

$= \frac{-2(3-f(x))}{f(x)}$

$= \boxed{\frac{-6 + 2f(x)}{f(x)}}$

$-6g(x) + 2$

$= -6 \times \frac{1}{f(x)} + 2$

$= \frac{-6}{f(x)} + 2$

$= \boxed{\frac{-6 + 2f(x)}{f(x)}}$

On a donc $g'(x) = -6g(x) + 2$

et donc g est solution de $y' = -6y + 2$

2) Résoudre (E') $\quad y' = -6y + 2$

les solutions sont : $y(x) = Ce^{-6x} - \frac{2}{-6}$

$$\boxed{y(x) = Ce^{-6x} + \frac{1}{3}} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

3) g solution de (E') donc $g(x) = Ce^{-6x} + \frac{1}{3}$

D'après $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ on a donc $f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{Ce^{-6x} + \frac{1}{3}}$

On a $f(0) = 4$ donc $\frac{1}{Ce^0 + \frac{1}{3}} = 4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{C + \frac{1}{3}} = 4$

$\Leftrightarrow 4(C+\frac{1}{3}) = 1$

$\Leftrightarrow 4C + \frac{4}{3} = 1$

$\Leftrightarrow 4C = 1 - \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow 4C = -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow C = -\frac{1}{12}$

donc $f(x) = \dfrac{1}{-\frac{1}{12}e^{-6x} + \frac{1}{3}}$

$f(x) = \dfrac{1}{\frac{-e^{-6x}+4}{12}}$

$$\boxed{f(x) = \frac{12}{4 - e^{-6x}}}$$

$\boxed{\text{Ex 4}}$ (E') $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$

1) Résoudre $2y' + y = 0$

$2y' + y = 0 \Leftrightarrow 2y' = -y \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y$

Solutions : $\boxed{y(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}}$ $C \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$ solution de (E')

f solution de $(E') \Leftrightarrow 2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$

* Calcul de $f'(x)$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(e^u)' = e^u \times u'$

$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \times (-\frac{1}{2})(mx^2 + px) + e^{-\frac{x}{2}}(2mx + p)$

$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}(mx^2 + px) + 2mx + p\right)$

$= e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{m}{2}x^2 - \frac{p}{2}x + 2mx + p\right)$

* $2f'(x) + f(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{m}{2}x^2 - \frac{p}{2}x + 2mx + p\right) + e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$

$= e^{-\frac{x}{2}}\left(\cancel{-mx^2} \cancel{- px} + 4mx + 2p + \cancel{mx^2} \cancel{+ px}\right)$

$= e^{-\frac{x}{2}}(4mx + 2p)$

donc f solution de $(E') \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

$e^{-\frac{x}{2}}(4mx + 2p) = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m = 1 \\ 2p = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$

donc $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$

f solution particulière de (E')

3) Les solutions de (E') $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$

sont de la forme $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$y(x) = Ce^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$

avec $C \in \mathbb{R}$

x 4) $A(2;1)$

On cherche s'il existe une solution telle que $y(2) = 1$

c'est à dire

$Ce^{-1} + e^{-1}\left(\frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{2} \times 2\right) = 1$

$Ce^{-1} + e^{-1}(1+1) = 1$

$Ce^{-1} + 2e^{-1} = 1$

$Ce^{-1} = 1 - 2e^{-1}$

$C = (1 - 2e^{-1}) \times e$

ou

$$\boxed{C = e - 2}$$

oui il existe une solution de (E') telle que $y(2) = 1$ et cette solution est unique car une seule valeur de C trouvée