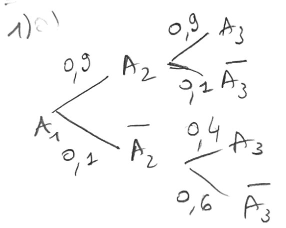
Partie 1

1)



2) $P(A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3)$ d'après la formule des probabilités totales

inutile | inutile

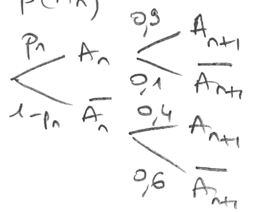
$= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4$

$= 0,81 + 0,04 = \boxed{0,85}$

3) $P_{A_3}(A_2) = \dfrac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \dfrac{0,9 \times 0,9}{0,85} = \dfrac{0,81}{0,85} \simeq \boxed{0,95}$

Partie 2

2) $p_n = p(A_n)$



$p_{n+1} = p(A_{n+1})$

$= p(A_n \cap A_{n+1}) + p(\overline{A_n} \cap A_{n+1})$ d'après la formule des proba. totales.

$p_{n+1} = 0,9\, p_n + 0,4(1 - p_n)$

$p_{n+1} = 0,9\, p_n + 0,4 - 0,4\, p_n$

$\boxed{p_{n+1} = 0,5\, p_n + 0,4}$

3 a) Démontrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$ $p_n > 0,8$

- Pour $n = 1$ $p_1 = 1 > 0,8$ donc vrai pour $n = 1$
- Soit $n \geq 1$ tel que $p_n > 0,8$

Démontrons que $p_{n+1} > 0,8$

On a $p_n > 0,8$

$0,5\, p_n > 0,5 \times 0,8$

$0,5\, p_n > 0,4$

$0,5\, p_n + 0,4 > 0,8$

$p_{n+1} > 0,8$

- Conclusion $\forall n \geq 1$ $p_n > 0,8$

b) $p_{n+1} - p_n = 0,5\, p_n + 0,4 - p_n = 0,4 - 0,5\, p_n$

Or pour $n \geq 1$ $p_n > 0,8$ donc $0,5\, p_n > 0,4$ et donc $0,4 - 0,5\, p_n < 0$

La suite (p_n) est donc décroissante

c) (p_n) est décroissante et minorée (par 0,8) donc elle converge

4) $U_n = p_n - 0,8$

a) $U_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5\, p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5\, p_n - 0,4$

$= 0,5\left(p_n - \dfrac{0,4}{0,5}\right)$

$= 0,5(p_n - 0,8)$

$\boxed{U_{n+1} = 0,5\, U_n}$

donc (U_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $U_1 = p_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$

b) $\forall n \geq 1$ $U_n = U_1 \times q^{n-1}$ donc $\boxed{U_n = 0,2 \times 0,5^{n-1}}$

On a donc $p_n = U_n + 0,8 = 0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,8$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$

car $-1 < 0,5 < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,2 \times 0 + 0,8 = \boxed{0,8}$

Partie 1

4) Epreuve de Bernoulli : Choisir un client.

Succès : le client achète un melon

Probabilité du succès : $P(A_3) = 0,85$

* 5 épreuves identiques et indépendantes

X compte le nombre de succès

X suit la loi $\mathcal{B}(5 ; 0,85)$

a) $P(X = 3) = \binom{5}{3} 0,85^3 \times 0,15^2 \simeq \boxed{0,14}$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,15^5 \simeq \boxed{1}$