Calculatrice interdite - Durée 1 heures

Exercice 1 — 3 points

Les questions sont indépendantes.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x\mathrm{e}^{1-3x^2}$

   Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 0$.

2. Soit u définie pour $x > 0$ par $u(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{6x} + 2$

   Déterminer les primitives de u.

3. Soit les fonctions h et g définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(2x^2 + x\right)\mathrm{e}^{-4x}$ et $g(x) = \left(1 - 8x^2\right)\mathrm{e}^{-4x}$

   Démontrer que la fonction h est une primitive de g

Exercice 2 — 6 points

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation différentielle : $4y' + 3y = 6$

2. Soit l'équation différentielle : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$ (E)

   Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de (E).

3. Déterminer la fonction f solution de $y' = -6y$ qui vérifie $f(0) = 2$.

   Justifier la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses et son sens de variation.

4. Déterminer la fonction f telle que pour tout réel x, $5f'(x) + \dfrac{2}{3}f(x) = 1$ et $f(0) = 3$

5. Soit l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{3}{x^2}$

   Déterminer les solutions de (E) pour $x > 0$.

Exercice 3 — 4 points

On considère l'équation différentielle : $y' = 3y(4 - y)$ (E)

On suppose qu'il existe une fonction f solution de (E) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie $f(0) = 1$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

1. Démontrer que g est solution de $y' = -12y + 3$ (E′)

2. Résoudre (E′)

3. En déduire une expression de la fonction f.