Calculatrice autorisée - Durée 2 heures

Exercice 1 **3 points**

Calculer une primitive de f dans les cas suivants :

① $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-3\right)^5$ ② $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{2\left(e^{3x}+1\right)^2}$ ③ $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}$

Exercice 2 **3 points**

Calculer les limites suivantes :

① $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+x}{7x+2}$ ② $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{x^2}{6-2x}$ ③ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7^n+3}{3^n+2}$

Exercice 3 **10 points**

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = 3U_n - 2n + 3$$

1. Calculer U_1 et U_2.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n \geqslant n$.

   b. En déduire la limite de la suite (U_n).
3. **a.** Démontrer que la suite (U_n) est croissante.

   b. La suite (U_n) est-elle majorée ?
4. Soit la suite (V_n) définie, pour tout entier naturel n, par $V_n = U_n - n + 1$.

   a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = 3^n + n - 1$.
5. **a.** Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n > 10^6$?

   b. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier n_0 qui satisfait la condition : pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n > 10^6$.

Exercice 4 **4 points**

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \dfrac{2^n}{n!}$

1. **a.** Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.

   b. En déduire que la suite (U_n) converge
2. On admet que pour tout $n \geqslant 2$, on a $2 \times 3^{n-2} \leqslant n!$

   En déduire la limite de (U_n).

Hors Barème

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $2 \times 3^{n-2} \leqslant n!$