$\boxed{A}$ $g = f' - 2f$ avec f solution de $(E) : y'' - y' - 2y = 0$

1) $g'(x) + g(x) = f''(x) - 2f'(x) + f'(x) - 2f(x)$

$= f''(x) - 2f'(x) + f'(x) - 2f(x)$

$= f''(x) - f'(x) - 2f(x)$

f est solution de $y'' - y' - 2y = 0$

donc $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$.

et donc $g'(x) + g(x) = 0$

et donc g est solution de $y' + y = 0$

De plus on a $g(0) = f'(0) - 2f(0)$

$= 1 - 2 \times 0$

$\boxed{g(0) = 1}$

2) g est solution de $y' + y = 0$ avec $g(0) = 1$

$y' + y = 0 \iff y' = -y$

les solutions sont $y(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

donc $g(x) = Ce^{-x}$

$g(0) = 1$ donc $Ce^{0} = 1$

$C = 1$

donc $\boxed{g(x) = e^{-x}}$

$\boxed{B}$ (E_2) $y' - 2y = e^{-x}$

1) $\phi(x) = -\frac{1}{3} e^{-x}$

$\phi'(x) = -\frac{1}{3} e^{-x} \times (-1) = \frac{1}{3} e^{-x}$

donc $\phi'(x) - 2\phi(x) = \frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} e^{-x} = \frac{3}{3} e^{-x} = e^{-x}$

donc ϕ est solution de $y' - 2y = e^{-x}$

2) <u>Résoudre $y' - 2y = 0$</u>

$y' - 2y = 0 \iff y' = 2y$

les solutions sont $y(x) = Ce^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

3) les solutions de $y' - 2y = e^{-x}$

sont donc $y(x) = \underbrace{Ce^{2x}}_{\text{solution générale de l'équation homogène } y' - 2y = 0} + \underbrace{\phi(x)}_{\text{solution particulière de } (E_2)}$

$\boxed{y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$\boxed{C}$ D'après A) Si f est solution de (E) $y'' - y' - 2y = 0$

alors $f'(x) - 2f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{g(x)}$

donc f est solution de $y' - 2y = e^{-x}$

donc d'après B) $f(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Donc si f est solution de (E) avec $f(0) = 0$

alors $Ce^{0} - \frac{1}{3} e^{0} = 0$

$C = \frac{1}{3}$

donc $\boxed{f(x) = \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x}}$

⚠ Il faut vérifier que cette fonction convient.

<u>Vérifions donc que f est solution de $y'' - y' - 2y = 0$</u>

avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{3} e^{2x} \times 2 - \frac{1}{3} e^{-x} \times (-1) = \frac{2}{3} e^{2x} + \frac{1}{3} e^{-x}$

$f''(x) = \frac{4}{3} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x}$

$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = \frac{4}{3} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x} - \frac{2}{3} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x} - 2\left(\frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x}\right)$

$= \cancel{\frac{4}{3} e^{2x}} - \cancel{\frac{1}{3} e^{-x}} - \cancel{\frac{2}{3} e^{2x}} - \cancel{\frac{1}{3} e^{-x}} - \cancel{\frac{2}{3} e^{2x}} + \cancel{\frac{2}{3} e^{-x}}$

$= 0$

donc f est solution de $y'' - y' - 2y = 0$.

De plus $f(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

et $f'(0) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$