Exercice 1 .... **9 points**

Les questions sont indépendantes.

1. Pour $x > 0$ et $y > 0$,

   a. Simplifier A : $A = \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) - \mathrm{e}^{-\ln(x)}$.

   b. Ecrire B sous la forme $a\ln(x) + b\ln(y)$ avec a et b deux réels : $B = 3\ln\left(xy^2\right) - \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

2. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

   Calculer $f'(x)$ puis donner le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

3. Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = \mathrm{e}^5$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \mathrm{e}^2\sqrt{U_n}$

   a. Démontrer que la suite (V_n) définie par $V_n = \ln(U_n) - 4$ est géométrique.

   b. Exprimer V_n en fonction de n puis en déduire U_n en fonction de n.

4. Résoudre : $\ln(x-3) < 2$

5. Déterminer le plus petit entier n tel que : $3 \times 0{,}8^n < 0{,}09$.

6. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{\mathrm{e}^x}$

7. Soit la suite (U_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $U_n = \dfrac{n}{2^n}$. On pose $V_n = \ln(U_n)$.

   Calculer la limite de (V_n) puis en déduire la limite de (U_n).

Exercice 2 .... **7,5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   Soit la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$

   a. Démontrer que la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$. On note α cette solution.

   c. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

   d. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. **Étude de la fonction f**

   a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

   c. En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$.