III Ex 1 $A(2,0,3)$ $B(0,2,1)$ $C(-1,-1,2)$ $D(3,-3,-1)$

1) a) Plan $\mathcal{P}$ passant par C et perpendiculaire à la droite (AB)

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$

donc $\mathcal{P}$ a pour équation $-2x+2y-2z+d=0$.

C appartient au plan donc $-2x_C+2y_C-2z_C+d=0$

$\cancel{2}-\cancel{2}-4+d=0$

$d=4$

$\mathcal{P}$ a pour équation $\boxed{-2x+2y-2z+4=0}$

b) Représentation paramétrique de (AB)

$\begin{cases}x=2-2k\\y=2k\\z=3-2k\end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$

c) Point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec (AB)

On cherche k tel que $-2(2-2k)+2(2k)-2(3-2k)+4=0$

$-\cancel{4}+4k+4k-6+4k+\cancel{4}=0$

$12k=6$

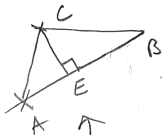
$k=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

$x=2-2\times\frac{1}{2}=2-1=1$

$y=2\times\frac{1}{2}=1$

$z=3-2\times\frac{1}{2}=3-1=2$ $\boxed{E(1,1,2)}$

d)



car E est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$\text{Aire}(ABC)=\frac{AB\times CE}{2}$

$AB=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}$ $\boxed{AB=2\sqrt{3}}$

$CE=\sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2+(2-2)^2}$

$CE=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=\boxed{2\sqrt{2}}$

donc $\text{Aire}(ABC)=\frac{\cancel{2}\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\boxed{2\sqrt{6}}$

Ex 1 (2) $A(2,0,3)$ $B(0,2,1)$ $C(-1,-1,2)$ $D(3,-3,-1)$ $F(1,-1,3)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Aucun de ces vecteurs ne sont colinéaires donc $\vec{AB}$ $\vec{AC}$ $\vec{AF}$ sont coplanaires si et seulement si il existe 2 réels a et b tels que $\vec{AB}=a\vec{AC}+b\vec{AF}$

$a\vec{AC}\begin{pmatrix}-3a\\-a\\-a\end{pmatrix}$ $b\vec{AF}\begin{pmatrix}-b\\-b\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AB}=a\vec{AC}+b\vec{AF}\iff\begin{cases}-3a-b=-2\\-a-b=2\\-a=-2\end{cases}$

$\iff\begin{cases}b=-3a+2\\b=-a-2\\a=2\end{cases}\iff\begin{cases}b=-4\\b=-4\\a=2\end{cases}$

$\iff\begin{cases}a=2\\b=-4\end{cases}$

On a : $\vec{AB}=2\vec{AC}-4\vec{AF}$

donc $\vec{AB},\vec{AC},\vec{AF}$ sont coplanaires donc les points A, B, C, F sont coplanaires

b) $\vec{FD}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$

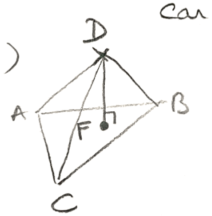
$\vec{FD}\cdot\vec{AB}=-4-4+8=0$ donc $\vec{FD}\perp\vec{AB}$

$\vec{FD}\cdot\vec{AC}=-6+2+4=0$ donc $\vec{FD}\perp\vec{AC}$

donc $\vec{FD}$ normal au plan (ABC)

car $\vec{FD}$ orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires.

c)



[FD] est la hauteur du tétraèdre

$\text{Volume}=\frac{\text{Aire}(ABC)\times FD}{3}$

$=\frac{2\sqrt{6}\times2\sqrt{6}}{3}=\frac{4\times6}{3}=8$

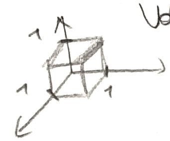
$\boxed{\text{Volume}=8\ \text{U.V.}}$

$FD=\sqrt{4+4+16}$

$FD=\sqrt{24}$

$=2\sqrt{6}$

U.V. : Unité de volume.



Volume de ce cube $=1.\text{U.V}$

$\boxed{\text{Ex 2}}$ $A(2,-1,0)$ $B(1,0,-3)$ $C(6,6,1)$ $E(1,2,4)$

$\mathcal{P} : 2x - y - z + 4 = 0$

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$

$AB = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

$AC = \sqrt{16+49+1} = \sqrt{66}$

$BC = \sqrt{25+36+16} = \sqrt{77}$

$AB = \|\vec{AB}\|$

$AC = \|\vec{AC}\|$

$BC = \|\vec{BC}\|$

On a $BC^2 = 77$ $AB^2 + AC^2 = 11 + 66 = 77$

donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

donc le tr. ABC est rectangle en A

2) a) Vecteur normal à $\mathcal{P}$: $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Montrons que $\vec{n}$ est un vecteur normal à (ABC)

$\vec{n}\cdot\vec{AB} = -2 - 1 + 3 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{AC} = 8 - 7 - 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{AC}$

donc $\vec{n}$ est normal à (ABC)

donc $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles

b) (ABC) a pour équation $2x - y - z + d = 0$

$A \in (ABC)$ donc $2x_A - y_A - z_A + d = 0$

$4 + 1 + d = 0$ $\boxed{d = -5}$

donc (ABC) a pour équation $\boxed{2x - y - z - 5 = 0}$

c) $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (ABC) donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ passe par $E(1,2,4)$ donc $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = 4 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

d) Pour vérifier que $H\left(4, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ est le projeté de E sur le plan (ABC) on peut vérifier que H appartient au plan (ABC) et (EH) est orthogonale au plan (ABC)

① $2x_H - y_H - z_H - 5 = 8 - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - 5 = 3 - 3 = 0$ donc $H \in (ABC)$

② $\vec{EH}\begin{pmatrix}3\\-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{EH}\cdot\vec{AB} = -3 - \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 0$

$\vec{EH}\cdot\vec{AC} = 12 - \frac{21}{2} - \frac{3}{2} = 12 - 12 = 0$

donc $\vec{EH}$ est normal au plan (ABC) donc (EH) est orthogonale au plan (ABC)

donc $H\left(4, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ est bien le projeté orthogonale de E sur (ABC)

$\boxed{\text{Ex 2 (2)}}$

3) Aire triangle ABC : $\mathcal{A} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{66}}{2} = \frac{\sqrt{11}\times\sqrt{11}\times\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{\mathcal{A} = \frac{11}{2}\sqrt{6}}$

$\text{Volume}(ABCE) = \frac{\text{Aire tr. ABC} \times \text{hauteur}}{3}$

$= \frac{\frac{11}{2}\sqrt{6} \times HE}{3}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{11}{2}\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{11}{2}\sqrt{3} \times \cancel{3}\sqrt{3}$

$= \frac{33}{2}$

$= \boxed{16{,}5}$ U.V. (unité de volume)

$\vec{EH}\left(3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$EH = \sqrt{9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}}$

$= \sqrt{9 + \frac{18}{4}}$

$= \sqrt{9 + \frac{9}{2}}$

$= \sqrt{\frac{27}{2}}$