TD : Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou sur un plan de l'espace muni d'un repère orthonormé

III. Exercices

Exercice 1

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points :

A(2 ; 0 ; 3), B(0 ; 2 ; 1), C(-1 ; -1 ; 2) et D(3 ; -3 ; -1).

On admet que les points A, B, C ne sont pas alignés et que les points A,B,C et D ne sont pas coplanaires.

Le but est de calculer le volume du tétraèdre ABCD.

1. **Calcul de l'aire du triangle ABC**

   a. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

   c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$

   d. Calculer l'aire du triangle ABC.

2. **Calcul du volume du tétraèdre ABCD**

   a. Soit le point F(1 ; -1 ; 3). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

   b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

   c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 2

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A(2 ; -1 ; 0) , B(1 ; 0 ; -3) , C(6 ; 6 ; 1) et E(1 ; 2 ; 4)
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. **a.** Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

   d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.

   Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5 unités de volume.