ÉPREUVE D’ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Mathématiques

Mars 2024

Sujet 1

Durée de l’épreuve : **4 heures**

L’usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L’usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l’appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Ce sujet est composé de 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 et comporte 4 exercices.

Exercice 1 5 points

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle]0 ; +∞[par : $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$

1. Déterminer les limites de g en 0 et +∞.

2. Déterminer le sens de variation de g sur]0 ; +∞[.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur]0 ; +∞[.

4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur]0 ; +∞[.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1)$

1. **a.** On admet que f est dérivable sur]0 ; +∞[et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que, pour tout x de]0 ; +∞[, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Dresser le tableau de variation de f sur]0 ; +∞[. Le calcul des limites n'est pas demandé.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur]0 ; +∞[puis dresser le tableau de signes de f sur]0;+∞[.

Partie 3

On admet que f admet des primitives sur]0 ; +∞[et on note F l'une d'entre elles.
On ne cherchera pas à déterminer une expression de F.

1. Etudier les variations de F sur]0 ; +∞[.

2. La courbe représentative de F admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, combien ?
Justifier votre réponse.

Exercice 2 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3e^x$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n^3 e^{u_n} = f(u_n)$.

a. Calculer u_1 et u_2.
On donnera les valeurs exactes, puis des valeurs approchées à 10^{-3} près.

b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python, ci-contre.

```
def fonc(n) :
    u = - 1
    for i in range (n) :
        u=u**3*exp(u)
    return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)` arrondie à 10^{-3} près.

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = x^2 e^x(x+3)$.

b. En déduire que le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-27e^{-3}$	$\nearrow$

c. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$$

d. En déduire que la suite (u_n) converge.

e. Déterminer L, la limite de la suite (u_n).
(On admettra que l'équation $x^2e^x - 1 = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ dont une valeur approchée à 10^{-1} près est 0,7)

Exercice 3 — 5 points

La partie 2 peut être traîtée indépendamment de la partie 1.

PARTIE 1

On considère l'équation différentielle : (E) : $y' + y = e^{-x}$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

Vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle (E ') : $y' + y = 0$.

Résoudre l'équation différentielle (E ') sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que g(0) = 2.

PARTIE 2.

a un étant un nombre réel, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = (x + a)e^{-x}$.

Par exemple f_2 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = (x+2)e^{-x}$

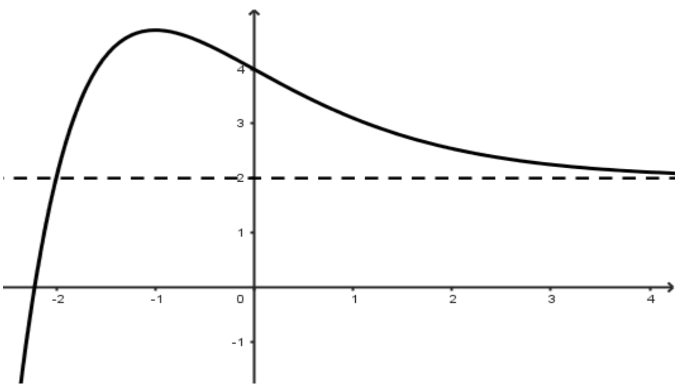
On admettra que, quel que soit le réel a, f_a est solution de l'équation différentielle : $y' + y = e^{-x}$

1. a. Montrer que pour tout réel x, $f_a(x) = e^{-x} - f_a'(x)$

b. Déterminer alors une primitive de f_a sur $\mathbb{R}$.

On pourra admettre pour la suite que la fonction : $x \longmapsto -\dfrac{1+a+x}{e^x}$, *est une primitive de* f_a *sur* $\mathbb{R}$.

2. Pour un réel a fixé on a représenté ci-contre une primitive F de la fonction f_a sur $\mathbb{R}$.



a. Par lecture graphique, déterminer la valeur de $F(0)$ et la limite de F en $+\infty$.

b. En déduire la valeur de a et l'expression de F.

Exercice 4 — 5 points

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.
Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables;
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

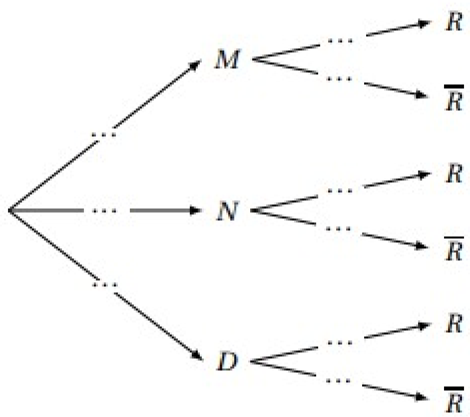
Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

- M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux »;
- N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux »;
- D : « Le déchet prélevé est dangereux »;
- R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,010 5.

3. Déterminer la probabilité $P\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0{,}6514$.

5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième*.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,651 4.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

a. Déterminer tous les entiers naturels n tels que $0{,}6514^n < 0{,}01$. On résoudra cette inéquation par le calcul.

b. Interpréter la réponse à la question précédente dans le contexte de l'exercice.