BB 2024 Sujet 1

Ex 1

Partie 1

Sur $]0,+\infty[$ $g(x) = \ln x + 2x - 2$

1) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty + 0 - 2 = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty + \infty - 2 = \boxed{+\infty}$

2) $g'(x) = \frac{1}{x} + 2$ On a $x>0$ donc $\frac{1}{x} + 2 > 0$

donc $g'(x) > 0$

donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

3)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

* Sur $]0,+\infty[$ g est continue (car dérivable)
* Sur $]0,+\infty[$ g est strictement croissante
* $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ $\Big\}$ $0 \in]-\infty,+\infty[$

D'après le corollaire du TVI l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur $]0,+\infty[$ que l'on note α

4) $g(1) = \ln(1) + 2 - 2 = 0 + 0 = 0$

donc $\boxed{\alpha = 1}$ puisque 1 est solution de l'équation $g(x) = 0$

On a donc

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie 2

Sur $]0,+\infty[$ $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 1)$

1 a) $f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 1) + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}$ $\Big\{ (uv)' = u'v + uv'$

$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{\ln x - 2 + 2x}{x^2}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ $\forall x > 0$ $x^2 > 0$.

b)

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
x^2	$\|\|$	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Ex 1 (2)

donc

x	0	$1/2$		1		e	$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	0	↘	-1	↗	0	↗

$f(1) = (2-1)(\ln 1 - 1)$

$f(1) = 1 \times (-1)$

$f(1) = -1$

2) $f(x) = 0 \iff \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 1) = 0$

$\iff 2 - \frac{1}{x} = 0$ ou $\ln x - 1 = 0$

$\iff \frac{1}{x} = 2$ ou $\ln x = 1$

$\iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = e$

$S = \left\{\frac{1}{2} ; e\right\}$

On a donc d'après les variations de f

x	0		$1/2$		e		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie 3

1) F primitive de f sur $]0,+\infty[$

donc $F'(x) = f(x)$

les variations de F sont donc :

x	0		$1/2$		e		$+\infty$
$F(x)$	$\|\|$	↗		↘		↗	

2) les points d'inflexion de F sont les point d'abscisses x où F'' s'annule en changeant de signe.

On a $F'(x) = f(x)$

donc $F''(x) = f'(x)$

D'après Partie 2, f' ne s'annule qu'en 1, et en 1 elle change de signe

donc F a un seul point d'inflexion

C'est le point d'abscisse 1

Ex 2 $\quad f(x) = x^3 e^x$

1) $U_0 = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = U_n^3 e^{U_n}$ ou $U_{n+1} = f(U_n)$

a) $U_1 = f(U_0) = f(-1) = (-1)^3 e^{-1} = \boxed{-e^{-1}} = \boxed{-\frac{1}{e}} \simeq \boxed{-0{,}368}$

$U_2 = f(U_1) = (-e^{-1})^3 \; e^{-e^{-1}}$

$= -e^{-3} \times e^{-e^{-1}} = \boxed{-e^{-3-e^{-1}}} \simeq \boxed{-0{,}034}$

b) fonc(2) : Au départ $u = -1$ donc $u = u_0$

i va de 0 à 1

Pour $i = 0 \quad u = u_1$

pour $i = 1 \quad u = u_2$

donc la fonction fonc(2) retourne la valeur de U_2

donc environ $-0{,}034$

2 a) $f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x$

$f'(x) = x^2 e^x (3 + x)$

b) Sur $\mathbb{R}$ $\quad x^2 \geq 0$ (s'annule en 0)

$e^x > 0$.

$3 + x = x + 3$ fonction affine

* $x + 3 = 0 \iff x = -3$
* $a = 1 > 0$.

donc fonction affine croissante.

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
x^2	+	+	0	+
e^x	+	+		+
$x+3$	−	0	+	+
$f'(x)$	−	0	+ 0	+
$f(x)$	↘	$-27e^{-3}$	↗	

$f(-3) = (-3)^3 e^{-3}$

$= -27 e^{-3}$

c) Démontrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a :

$-1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0$.

$\boxed{1}$ Pour $n = 0 \quad U_n = U_0 = -1$

$U_{n+1} = U_1 = -e^{-1} \simeq -0{,}368$

donc $-1 \leq U_0 \leq U_1 \leq 0$

donc vrai pour $n = 0$

$\boxed{2}$ Soit $n \geq 0$ tel que $-1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0$

On va démontrer que $-1 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 0$

On a $-1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0$

$f(-1) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(0)$ } sur $[-1, 0]$ f est croissante

Ex 2 (2) $\quad$ donc $-e^{-1} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 0$

$\simeq -0{,}368$

On a : $-1 \leq -e^{-1}$

donc $-1 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 0$

CQFD

$\boxed{3}$ Conclusion : D'après le principe de raisonnement par récurrence $-1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0$. $\forall n \geq 0$.

d) On a $\forall n \geq 0 \quad U_n \leq U_{n+1}$ donc (U_n) croissante

et $\forall n \geq 0 \quad U_n \leq 0$ donc (U_n) majorée (par 0)

donc la suite (U_n) converge vers un nombre L

$(L \leq 0)$

e) On a $U_{n+1} = f(U_n)$

par passage à la limite on a

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n)$

$L = \lim\limits_{x \to L} f(x)$

$L = f(L)$ car f continue sur $\mathbb{R}$

On a $L = f(L) \iff L = L^3 e^L$

$\iff L - L^3 e^L = 0$

$\iff L(1 - L^2 e^L) = 0$

$\iff L = 0$ ou $1 - L^2 e^L = 0$

On sait que l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ qui vaut environ 0,7

On remarque que $x^2 e^x - 1 = 0 \iff 1 - x^2 e^x = 0$.

donc $L = f(L) \iff L = 0$ ou $L \simeq 0{,}7$

Or $\forall n \; U_n \leq 0$ donc $L \leq 0$

donc $\boxed{L = 0}$

$\boxed{\text{Ex 3}}$

Partie 1 : $(E) : y' + y = e^{-x}$

1) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{1 \times e^x - x e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) + f(x) = \frac{1-x}{e^x} + \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x} = \boxed{e^{-x}}$$

donc f est solution de (E)

2) $(E') \quad y' + y = 0$

$\iff y' = -y$

les solutions sont $\boxed{y(x) = C e^{-x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

3) les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc

$$\boxed{y(x) = C e^{-x} + \frac{x}{e^x}}$$

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x} \\ f \text{ solution particulière de } (E) \end{cases}$

4) On cherche la solution de E notée g telle que $g(0) = 2$

On a $g(x) = Ce^{-x} + \dfrac{x}{e^x}$

$g(0) = 2 \iff Ce^0 + 0 = 2$

$\iff C = 2$

donc $g(x) = 2e^{-x} + \dfrac{x}{e^x}$

Partie 2 $\quad a \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = (x+a)e^{-x}$

1 a) f_a est solution de (E) donc $f_a'(x) + f_a(x) = e^{-x}$

et donc $f_a(x) = e^{-x} - f_a'(x)$

b) Soit F_a une primitive de f_a sur $\mathbb{R}$

avec $F_a(x) = \dfrac{e^{-x}}{-1} - f_a(x)$

donc $F_a(x) = -e^{-x} - (x+a)e^{-x}$

$F_a(x) = e^{-x}(-1-(x+a))$

$F_a(x) = e^{-x}(-1-x-a)$

$F_a(x) = -e^{-x}(1+x+a) = -\dfrac{1+a+x}{e^x}$

Ex 3 (2) a) $F(0) = 4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2$

b) F est une primitive de f_a et $x \longmapsto -\dfrac{1+a+x}{e^x}$ aussi

donc il existe une constante C réelle telle que

$$\boxed{F(x) = -\frac{1+a+x}{e^x} + C}$$

* On a $F(0) = 4$ donc $-\dfrac{1+a}{e^0} + C = 4$

$-\dfrac{1+a}{1} + C = 4$

$-1 - a + C = 4$

$\boxed{-a + C = 5}$

* On a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1+a+x}{e^x} + C$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -\left(\dfrac{1+a}{e^x} + \dfrac{x}{e^x}\right) + C$

$= -(0+0) + C$

$= C$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

Rmq : $\begin{cases} \text{Si } a = -1 \\ \quad \text{alors } 1+a = 0 \\ \quad \text{et } \dfrac{1+a}{e^x} = 0 \\ \quad \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+a}{e^x} = 0 \\ \text{Si } a \neq -1 \text{ alors } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+a}{e^x} = 0 \end{cases}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = C$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2$

donc $\boxed{C = 2}$

On en déduit donc la valeur de a

d'après $-a + C = 5$

$-a + 2 = 5$

$-a = 3$

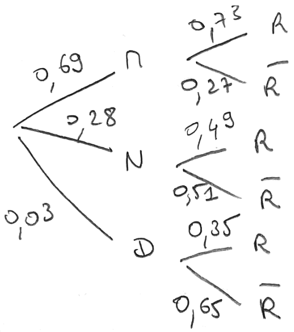
$\boxed{a = -3}$

Conclusion : $F(x) = -\dfrac{1-3+x}{e^x} + 2$

$F(x) = -\dfrac{-2+x}{e^x} + 2$

$$\boxed{F(x) = \frac{2-x}{e^x} + 2}$$

Ex 4

1) 

2) $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0{,}03 \times 0{,}35 = \boxed{0{,}0105}$

3) $P(M \cap \overline{R}) = P(M) \times P_M(\overline{R}) = 0{,}69 \times 0{,}27 = \boxed{0{,}1863}$

18,63 % des déchets sont minéraux non dangereux et non recyclables

4) D'après la loi des probabilités totales

on a : $P(R) = P(M \cap R) + P(N \cap R) + P(D \cap R)$

$= 0{,}69 \times 0{,}73 + 0{,}28 \times 0{,}49 + 0{,}03 \times 0{,}35$

$= \boxed{0{,}6514}$

5) $P_R(\overline{D}) = \dfrac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)} = \dfrac{P(M \cap R) + P(N \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}69 \times 0{,}73 + 0{,}28 \times 0{,}49}{0{,}6514}$

$\simeq \boxed{0{,}9839}$

B 1a) X suit la loi $\mathcal{B}(20 ; 0{,}6514)$

b) $P(X = 14) = \binom{20}{14} \times 0{,}6514^{14} \times (1 - 0{,}6514)^{6} \simeq \boxed{0{,}1723}$

2a) $0{,}6514^n < 0{,}01$

$\iff n \ln(0{,}6514) < \ln(0{,}01)$) ln strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$\iff n > \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6514)}$) car $\ln(0{,}6514) < 0$ puisque $0 < 0{,}6514 < 1$

Réponse $\boxed{n \geq 11}$

b) A partir de 11 déchets, la probabilité que tous les déchets soient recyclables est inférieure à 0,01