ÉPREUVE D’ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

# Mathématiques

**Mars 2024**

**Sujet 2**

Durée de l’épreuve : **4 heures**

*L’usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*
*L’usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l’appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Ce sujet est composé de 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 et comporte 4 exercices.

## Exercice 1 — 5 points

Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 1 - \frac{3}{2}\ln(x^2+1)$

On donne ci-contre sa représentation graphique dans un repère orthogonal.


**1.** Conjecturer graphiquement :

- le sens de variation de $f$.
- le signe de $f$.
- la convexité de $f$.
- les limites de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$

*L'objectif de l'exercice est de confirmer ou d'infirmer chacune de ces conjectures.*

**2.** **a.** Montrer que pour tout réel $x$ on a : $f'(x) = \dfrac{2x^2-3x+2}{x^2+1}$.

**b.** La conjecture concernant le sens de variation de $f$ est-elle vraie ? Justifier.

**3.** **a.** Justifier que sur [0;2], l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$. Donner une valeur approchée de $\alpha$ au centième près.

**b.** En déduire le signe de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**4.** On admet que $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f''$ la fonction dérivée de $f'$.

**a.** Montrer que pour tout réel $x$ on a : $f''(x) = \dfrac{3(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

**b.** La conjecture concernant la convexité de $f$ est elle vraie ? Justifier.

**5.** **a.** Calculer la limite en $-\infty$ de $f$.

**b.** *On admet que pour tout réel $x>2$, $\frac{3}{2}\ln(x^2+1) < 4\ln(x)$.*

En déduire la limite en $+\infty$ de $f$.

## Exercice 2 5 points

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

Soit $a$ un réel positif. On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le comortement de la suite $(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, selon différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

**1.** A l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)$ pour $a = 2{,}9$ puis pour $a = 3{,}1$.

**2.** Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)$ converge vers un réel L.

**a.** Montrer que $L = \frac{1}{2}L^2 - L + \frac{3}{2}$

**b.** Déterminer les valeurs possibles de L. Détailler les calculs.

*On admet pour la suite de l'exercice que les valeurs possibles de L sont 1 et 3.*

**3.** Dans cette question, on prend $a = 2{,}9$.

**a.** Montrer que $f$ est croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

**b.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

**c.** En déduire que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

*Dans les deux questions qui suivent $a = 3{,}1$ et on admet que la suite $(u_n)$ est croissante.*

**4.** A l'aide des questions précédentes montrer, par un raisonnement par l'absurde, que la suite $(u_n)$ n'est pas majorée.

**5.** On considère la fonction Python `seuil` suivante dans laquelle `M` est un nombre strictement positif.

```
def seuil(M) :
    u=3.1
    n=0
    while u < M :
        u=0.5*u**2 -u - 1.5
        n=n+1
    return n
```

**a.** Sans justifier, déterminer la valeur renvoyée par `seuil(10**6)`.

**b.** La fonction `seuil` renvoie-t-elle une valeur quelle que soit la valeur de M , aussi grande soit-elle ? Justifier.

## Exercice 3 — 5 points

On considère l'équation différentielle : (E) : $y' - 2y = e^{2x}$

**1.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{2x}$ .
Vérifier que la fonction $f$ est une solution de l'équation différentielle (E).

**2.** On considère l'équation différentielle (E ') : $y' - 2\,y = 0$.
Résoudre l'équation différentielle (E ') sur $\mathbb{R}$.

**3.** En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

**4.** Déterminer l'unique solution $g$ de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

**5.** *$a$ un étant un nombre réel, on note $f_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = (x + a)e^{2x}$ .*
*Par exemple $f_2$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = (x+2)e^{2x}$*
*On admet que pour tout réel $a$, $f_a$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.*

**a.** Montrer que pour tout réel $x$, $f_a'(x) = (2x+2a+1)e^{2x}$.

**b.** Montrer que la fonction $f_a$ admet un minimum en $x = -\frac{1}{2} - a$.

**c.** Déterminer une solution de (E) dont le minimum est égal à –1.

## Exercice 4 5 points

Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte.

Une étude a montré que 70 % des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60 % visitent la grotte. Cette étude montre aussi que 6 % des clients de l'hôtel ne font aucune visite.

On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

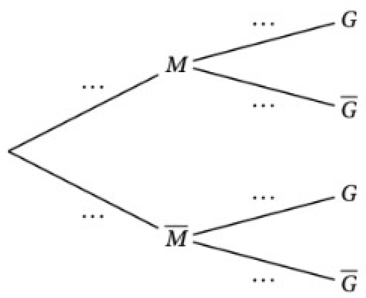
• M l'évènement : « le client visite le musée »;

• G l'évènement : « le client visite la grotte ».

Pour tout évènement E, on note p(E) la probabilité de E. Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p(\overline{M} \cap \overline{G}) = 0{,}06$.

**1.** **a.** Montrer que $p_{\overline{M}}(\overline{G}) = 0{,}2$.

**b.** L'arbre pondéré ci-contre modélise la situation. Recopier et compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.




**c.** Quelle est la probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » ?

**d.** Montrer que p(G) = 0,66.

**2.** Les tarifs pour les visites sont les suivants :

• visite du musée : 12 euros;

• visite de la grotte : 5 euros.

On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.

**a.** Donner la loi de probabilité de T. On pourra présenter la réponse sous forme d'un tableau.

**b.** Calculer l'espérance mathématique de T.

**c.** Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour.
Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.

**3.** On choisit au hasard 100 clients de l'hôtel, en assimilant ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux 100 clients choisis, associe le nombre de clients ayant visité la grotte.

**a.** On admet que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

**b.** Calculer la probabilité que 55 clients aient visité la grotte.
*On donnera une écriture de la valeur exacte de cette probabilité ("une formule") puis une valeur approchée à $10^{-3}$ près.*

**c.** Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de la probabilité qu'au moins les trois quarts de ces clients aient visité la grotte