BB 2024 - Sujet 2

Ex 1 $f(x) = 2x - 1 - \frac{3}{2}\ln(x^2+1)$

1) Conjectures

* f semble croissante sur $\mathbb{R}$
* f semble être négative sur $]-\infty, 1[$, positive sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 1
* f semble être concave sur $]-\infty, 1]$ et convexe sur $[1, +\infty[$
* Il semble que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2 a) $f'(x) = 2 - \frac{3}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$

$f'(x) = 2 - \frac{3x}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1) - 3x}{x^2+1} = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2+1}$

b) $f'(x)$ est un quotient :

Numérateur : $2x^2 - 3x + 2$ (trinôme du 2nd degré)

Racines : $2x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2$

$\Delta = 9 - 16 = -7$

$\Delta < 0$ donc pas de racines dans $\mathbb{R}$

$a = 2$ $a > 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $2x^2 - 3x + 2 > 0$

Dénominateur : $x^2 + 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 + 1 > 0$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > 0$

et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (Conjecture vraie)

3 a) Sur $[0;2]$ f est continue (car dérivable)

Sur $[0;2]$ f est strictement croissante

$f(0) = -1 - \frac{3}{2}\ln(1) = -1$

$f(2) = 4 - 1 - \frac{3}{2}\ln(5) = 3 - \frac{3}{2}\ln(5) \simeq 0,59$

$0 \in [f(0); f(2)]$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[0;2]$ que l'on note α

On a $\boxed{\alpha \simeq 1,08}$

Ex 1 (2)

b) Signe de f :

x	$-\infty$		$\alpha \simeq 1,08$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4) a) $f'(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2+1}$

$f''(x) = \frac{(4x-3)(x^2+1) - (2x^2 - 3x + 2) \times 2x}{(x^2+1)^2}$

$f''(x) = \frac{\cancel{4x^3} + \cancel{4x} - 3x^2 - 3 - \cancel{4x^3} + 6x^2 - \cancel{4x}}{(x^2+1)^2}$

$f''(x) = \frac{3x^2 - 3}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{3(x^2-1)}{(x^2+1)^2}}$

b) Pour étudier la convexité de f, on va étudier le signe de f''

Signe de f'' ? (Signe d'un quotient)

Numérateur : $3(x^2-1) = 3x^2 - 3$ (trinôme du 2nd degré)

Racines $3(x^2-1) = 0$

$\iff x^2 - 1 = 0$

$\iff x^2 = 1$

$\iff x = 1$ ou $x = -1$

$a = 3 > 0$

Dénominateur $(x^2+1)^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $(x^2+1)^2 > 0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$3(x^2-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

il y a deux points d'inflexion. Pour $x = -1$ et pour $x = 1$

la conjecture sur la convexité est fausse

car sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$ $f''(x) > 0$ donc f est convexe

et sur $[-1, 1]$ $f''(x) < 0$ donc f est concave

Ex 1 (3)

5 a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x-1-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)$

On a : $\lim_{x\to-\infty} 2x-1 = -\infty$

On a : $\lim_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$

et $\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$

donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = \boxed{-\infty}$

b) $f(x) = 2x-1-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)$

$\forall x > 2 \quad \frac{3}{2}\ln(x^2+1) < 4\ln(x)$

donc $-\frac{3}{2}\ln(x^2+1) > -4\ln(x)$

$2x-1-\frac{3}{2}\ln(x^2+1) > 2x-1-4\ln(x)$

donc $f(x) > 2x-1-4\ln(x)$

On calcule $\lim_{x\to+\infty} 2x-1-4\ln x$ FI

$\lim_{x\to+\infty} 2x-1-4\ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-4\frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty(2-0-0)$

$= \boxed{+\infty}$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

Donc d'après le théorème de comparaison

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Ex 2 Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

$a \geqslant 0$ $u_0 = a$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Conjectures :

Pour $a = 2,9$ la suite (u_n) semble tendre vers 1 et être decroissante

Pour $a = 3,1$ la suite (u_n) semble tendre vers $+\infty$ et être croissante

2) On se place dans le cas où $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$

a) On a $u_{n+1} = f(u_n)$

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$

Par passage à la limite

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$

donc $\boxed{L = \frac{1}{2}L^2 - L + \frac{3}{2}}$

b) $L = \frac{1}{2}L^2 - L + \frac{3}{2} \iff \frac{1}{2}L^2 - L + \frac{3}{2} - L = 0$

$\iff \frac{1}{2}L^2 - 2L + \frac{3}{2} = 0$) $\times 2$

$\iff L^2 - 4L + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 4\times1\times3$

$\Delta = 16 - 12 = 4$ $\qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$L_1 = \frac{4+2}{2} = 3$

$L_2 = \frac{4-2}{2} = 1$

Valeurs possibles pour L

1 et 3.

3) Pour $a = 2,9$

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{2}\times 2x - 1 = x - 1$

Signe de $f'(x)$ sur $[1;+\infty[$

On a $x \geqslant 1$ donc $x - 1 \geqslant 0$

donc $f'(x) \geqslant 0$

donc f croissante sur $[1,+\infty[$

Ex2 (2)

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$

* Pour $n = 0$ $\quad U_{n+1} = U_1 = f(U_0) = f(2{,}9) = 2{,}805$

$U_n = U_0 = 2{,}9$

On a $1 \leq 2{,}805 \leq 2{,}9$

donc $1 \leq U_1 \leq U_0$

donc vrai pour $n = 0$

* Soit $n \geq 0$ tel que $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$

Montrons que $1 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

On a $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$

$f(1) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$ car f croissante sur $[1, +\infty[$

$1 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$ CQFD

* D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $n \geq 0$ $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$.

c) D'après $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \leq U_n$ donc (U_n) décroissante

et on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 \leq U_n$ donc (U_n) minorée par 1

La suite (U_n) étant décroissante et minorée, elle converge vers un nombre l et on a de plus

$1 \leq l$

On a $U_0 = 2{,}9$ et (U_n) décroissante donc (U_n) ne peut pas tendre vers 3, elle a donc pour limite 1

4) $a = 3{,}1$ et (U_n) croissante

Si (U_n) était majorée, étant croissante, elle serait convergente, or la limite serait 1 ou 3 ce qui est impossible puisque pour tout n, $U_n \geq 3{,}1$

Conclusion : (U_n) n'est pas majorée.

5) a) Seuil (10**6) renvoie 9

b) La suite (U_n) étant croissante non majorée, elle tend vers $+\infty$.

Donc quelle que soit la valeur de A aussi grande soit-elle il existe un terme U_n qui vérifie $U_n \geq A$

donc la boucle s'arrête et donc la fonction renvoie une valeur

Ex 3 $\quad (E)$ $\quad y' - 2y = e^{2x}$

1) Sur $\mathbb{R}$ $\quad f(x) = xe^{2x}$

$f'(x) = 1 \times e^{2x} + x \times e^{2x} \times 2$

$f'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$

On a $f'(x) - 2f(x) = e^{2x}(1 + 2x) - 2xe^{2x}$

$= e^{2x} + 2xe^{2x} - 2xe^{2x}$

$= e^{2x}$

donc f est solution de $y' - 2y = e^{2x}$

2) (E') $\quad y' - 2y = 0$

$y' - 2y = 0 \iff y' = 2y$

les solutions de (E') sont : $y(x) = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

3) les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont :

$\boxed{y(x) = Ce^{2x} + xe^{2x}}$ $\quad C \in \mathbb{R}$

4) On cherche la solution g de (E) telle que $g(0) = 2$

On a : $g(x) = Ce^{2x} + xe^{2x}$

$g(0) = 2 \iff Ce^0 + 0 = 2$

$\iff C = 2$

donc $g(x) = 2e^{2x} + xe^{2x}$

ou $\boxed{g(x) = e^{2x}(2 + x)}$

5) Pour $a \in \mathbb{R}$, soit f_a défini sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = (x + a)e^{2x}$

On a f_a solution de (E)

a) $f'_a(x) = 1 \times e^{2x} + (x + a) \times e^{2x} \times 2$

$f'_a(x) = (1 + 2(x + a))\, e^{2x}$

$f'_a(x) = (1 + 2x + 2a)\, e^{2x}$

$\boxed{f'_a(x) = (2x + 2a + 1)\, e^{2x}}$

Méthode 2

$f'_a(x) - 2f_a(x) = e^{2x}$

donc

$f'_a(x) = e^{2x} + 2f_a(x)$

$= e^{2x} + 2(x + a)e^{2x}$

$= e^{2x}(1 + 2x + 2a)$

b) Signe de $f'_a(x)$ (Signe d'un produit)

* $2x + 2a + 1 = 0 \iff 2x = -2a - 1 \iff x = -a - \frac{1}{2}$

$2x + 2a + 1 \geq 0 \iff 2x \geq -2a - 1 \iff x \geq -a - \frac{1}{2}$

* $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{2x} > 0$

Ex 3 (2)

x	$-\infty$		$-a-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+2a+1$		$-$	0	$+$	
e^{2x}		$+$		$+$	
$f'_a(x)$		$-$	0	$+$	
$f_a(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Donc f_a admet un minimum en $x = -a - \frac{1}{2}$

f_a est solution de (E) on cherche a tel que le minimum est égal à -1, c'est-à-dire

$f(-a-\frac{1}{2}) = -1$

On a $f(-a-\frac{1}{2}) = (-a-\frac{1}{2}+a)\, e^{2(-a-\frac{1}{2})}$

$= -\frac{1}{2} e^{-2a-1}$

donc $f(-a-\frac{1}{2}) = -1$

$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2} e^{-2a-1} = -1$

$\Longleftrightarrow -e^{-2a-1} = -2$

$\Longleftrightarrow e^{-2a-1} = 2$

$\Longleftrightarrow -2a-1 = \ln(2)$

$\Longleftrightarrow -2a = \ln(2)+1$

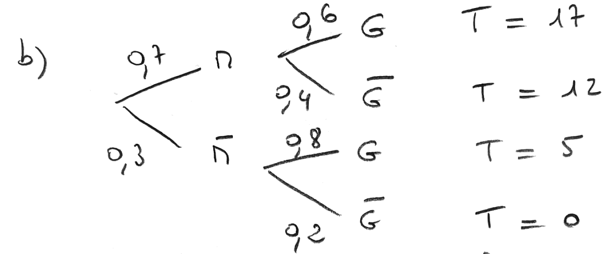
$\Longleftrightarrow a = -\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}$

donc une solution de (E) qui a pour minimum -1 est $f(x) = (x - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2})\, e^{2x}$

Ex 4

1 a) $P_{\bar{n}}(\bar{G}) = \dfrac{P(\bar{n} \cap \bar{G})}{P(\bar{n})} = \dfrac{0,06}{0,3} = \dfrac{6}{30} = \dfrac{2}{10} = 0,2$

b)



c) Probabilité que le client visite la grotte et ne visite pas le musée

$P(\bar{n} \cap G) = P(\bar{n}) \times P_{\bar{n}}(G) = 0,3 \times 0,8 = \boxed{0,24}$

d) D'après la formule des probabilités totales

$P(G) = P(n \cap G) + P(\bar{n} \cap G)$

$= 0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,8$

$= 0,42 + 0,24 = \boxed{0,66}$

2) a) Loi de probabilité de T

$P(T=17) = P(n \cap G) = 0,42$

$P(T=12) = P(n \cap \bar{G}) = 0,28$

$P(T=5) = P(\bar{n} \cap G) = 0,24$

$P(T=0) = P(\bar{n} \cap \bar{G}) = 0,06$

total égal à 1

b) Espérance de T.

$E(T) = 17 \times 0,42 + 12 \times 0,28 + 5 \times 0,24 + 0 \times 0,06$

$E(T) = 11,7$

c) Pour obtenir un montant moyen supérieur à 700 € par jour il faut un nombre moyen de client par jour n tel que $11,7 \times n > 700$

$n > \dfrac{700}{11,7}$

donc $\boxed{n = 60}$

Donc il faut en moyenne 60 personnes par jour pour atteindre l'objectif.

$\boxed{\text{Ex } 4(2)}$

5) a) X suit la loi $\mathcal{B}(100\ ;\ 0{,}66)$

b) $P(X=55) = \binom{100}{55} \times 0{,}66^{55} \times (1-0{,}66)^{45}$

$\simeq \boxed{0{,}006}$

c) les $\frac{3}{4}$ des personnes est égal à 75 personnes.

$P(X \geqslant 75) \simeq \boxed{0{,}034}$