

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points :  $A(3 ; -2 ; 2)$ ,  $B(6 ; 1 ; 5)$ ,  $C(6 ; -2 ; -1)$  et  $D(0 ; 4 ; -1)$

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :  $V = \frac{1}{3} \mathcal{A} \times h$

où  $\mathcal{A}$  est l'aire de la base et  $h$  la hauteur correspondante.

1. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2.
  - a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
  - b. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
  - c. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
3. On considère le point  $H(5 ; 0 ; 1)$ .
  - a. Montrer qu'il existe des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{BH} = \alpha \vec{BC} + \beta \vec{BD}$ .
  - b. Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
  - c. En déduire la distance du point A au plan (BCD).
4. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.