$A(3,-2,2)$ $B(6,1,5)$ $C(6,-2,-1)$ $D(0,4,-1)$

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas deux à deux colinéaires car pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a :

$$\vec{AB} \neq k\vec{AC}$$
$$\vec{AB} \neq k\vec{AD}$$
$$\vec{AC} \neq k\vec{AD}$$

donc A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que

$\vec{AB} = a\vec{AC} + b\vec{AD}$.

c'est à dire tels que : $\begin{cases} 3a - 3b = 3 \\ 6b = 3 \\ -3a - 3b = 3. \end{cases}$ noté (S)

$(S) \iff \begin{cases} 3a - 6 = 3 \\ b = 2 \\ -3a - 6 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a = 9 \\ b = 2 \\ -3a = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ a = -3 \end{cases}$

(S) n'a pas de solution donc A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

2a) On remarque que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9 + 0 - 9 = 0$

donc les droites (AB) et (AC) sont orthogonales

donc le triangle ABC est rectangle en A.

b) $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = -9 + 18 - 9 = 0$

$\vec{AD} \cdot \vec{AC} = -9 + 0 + 9 = 0$

donc $(AD) \perp (AB)$ et $(AD) \perp (AC)$

(AD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) donc (AD) est perpendiculaire au plan (ABC)

c) Pour le tétraèdre $ABCD$, on choisit la base ABC et la hauteur $[AD]$

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABC) \times AD$$

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$$

$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}$

$AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{9+0+9} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$

$AD = \|\vec{AD}\| = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{9+9\times 4+9} = \sqrt{9\times 6} = 3\sqrt{6}$.

$$V = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times \cancel{3}\sqrt{6}.$$

$$\boxed{V = 27 \text{ U.V.}}$$

3) $H(5,0,1)$

$\vec{BH}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$ $\vec{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$

a) $\vec{BH} = \alpha\vec{BC} + \beta\vec{BD}$

$\iff \begin{cases} -1 = 0 - 6\beta \\ -1 = -3\alpha + 3\beta \\ -4 = -6\alpha - 6\beta \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -6\beta = -1 \\ -3\alpha + 3\beta = -1 \\ -6\alpha - 6\beta = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = \frac{1}{6} \\ -3\alpha = -1 - 3\times\frac{1}{6} \\ -6\alpha = -4 + 6\times\frac{1}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = \frac{1}{6} \\ -3\alpha = -1-\frac{1}{2} \\ -6\alpha = -3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \beta = \frac{1}{6} \\ -3\alpha = -\frac{3}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = \frac{1}{6} \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{6} \end{cases}$

On a donc $\boxed{\vec{BH} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{6}\vec{BD}}$

b) D'après $\vec{BH} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{6}\vec{BD}$, on en déduit que les vecteurs $\vec{BH}$, $\vec{BC}$ et $\vec{BD}$ sont coplanaires et donc que les points B, H, C, D sont coplanaires donc que H appartient au plan (BCD)

Rmq : On peut parler du plan (BCD) car les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{BD}$ ne sont pas colinéaires donc les points B, C, D ne sont pas alignés et définissent un plan.

Pour montrer que H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) il reste à montrer que (AH) est orthogonale au plan (BCD).

Pour cela on montre que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. $\quad \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 - 6 + 6 = 0$

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = -12 + 6 + 6 = 0.$

<u>Conclusion</u> H est le projeté de A sur le plan (BCD)

c) La distance de A au plan (BCD) est donc égale à AH

$AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3.$

4) On sait que le tétraèdre ABCD a pour volume 27

Si on choisit la base BCD, la hauteur à considérer est alors AH, on a donc :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(BCD) \times AH$$

donc $\text{Aire}(BCD) \times AH = 3\mathcal{V}$

$$\text{Aire}(BCD) = \frac{3\mathcal{V}}{AH} = \frac{3 \times 27}{3} = 27$$

$$\boxed{\text{Aire}(BCD) = 27 \text{ U.A}}$$