Géométrie dans l'espace

Durée : 1 heure

Calculatrice interdite

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne :

$$\mathscr{P}_1 : \quad x + y + 2z + 1 = 0$$

$$\mathscr{P}_2 : \quad 2x + 3y - 2 = 0$$

1. **a.** Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_1$ sont sécants.

b. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

2. Soit les points A(4 ; -6 ; 3) , B(6 ; 2 ; -2).

a. Démontrer que la droite (AB) est parallèle au plan $\mathscr{P}_1$.

b. La droite (AB) est-elle incluse dans le plan $\mathscr{P}_1$?

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1 ; 1 ; 3)$,
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

b. Montrer que le point B$(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

On rappelle que le point B$(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

a. Justifier que $\mathscr{D}$ est orthogonale à la droite (AH).

b. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

c. A l'aide des deux questions précédentes, montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

d. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.