Ex 1

1) f est décroissante quand f' est négative
donc f est décroissante sur $[-2,-1]$ et $[1,3]$

2) f est concave quand f' est décroissante
donc f est concave sur $[0,2]$

3) On a un point d'inflexion quand f change de convexité
donc quand f' change de variation
donc f a deux points d'inflexion, l'un en $x=0$
et l'autre en $x=2$

4) $\mathcal{C}_f$ a une tangente horizontale quand f' s'annule
donc $\mathcal{C}_f$ a 3 tangentes horizontales (pour $x=-1$,
$x=1$ et $x=3$)

Ex 2

$f(x) = x^3 + x$

1) $f'(x) = 3x^2 + 1$
$f''(x) = 6x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	concave		convexe

2) $A \in \mathcal{C}_f$ $A(1, f(1))$ donc $A(1,2)$
$B \in \mathcal{C}_f$ $B(2, f(2))$ donc $B(2;10)$

a) $\text{Coeff}(AB) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{10-2}{2-1} = \dfrac{8}{1} = 8$

(AB) a pour équation $y = 8x + b$
$A \in (AB)$ donc $y_A = 8x_A + b$
$2 = 8 + b$
$b = -6$ donc $\boxed{y = 8x - 6}$

b) Sur $[1,2]$ f est convexe
$[AB]$ est une corde de $\mathcal{C}_f$ sur $[1,2]$
donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $[AB]$
donc pour tout x de $[1,2]$ $f(x) \leq 8x - 6$

Ex 3

$f(x) = x - x^2 \ln(x)$

1) $f'(x) = 1 - \left(2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right)$
$f'(x) = 1 - (2x \ln(x) + x)$
$f'(x) = 1 - 2x \ln x - x$
$f''(x) = 0 - \left(2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x}\right) - 1$
$f''(x) = -(2\ln(x) + 2) - 1$
$\boxed{f''(x) = -2\ln(x) - 3}$

2) $f''(x) = 0 \iff -2\ln(x) - 3 = 0$
$\iff -2\ln(x) = 3$
$\iff \ln x = -\frac{3}{2}$
$\iff x = e^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x) \geq 0 \iff -2\ln(x) - 3 \geq 0$
$\iff -2\ln(x) \geq 3$
$\iff \ln(x) \leq -\frac{3}{2}$
$\iff x \leq e^{-\frac{3}{2}}$ exp ↗ sur $\mathbb{R}$

x	0	$e^{-3/2}$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	convexe		concave	

3) $1 = e^0$
Sur $[1, +\infty[$ f est concave
donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de la tangente en 1