$\boxed{\text{Ex1}}$ $\mathcal{P}_1 : x + y + 2z + 1 = 0$

$\mathcal{P}_2 : 2x + 3y - 2 = 0$

1) a) Vecteur normal de $\mathcal{P}_1$: $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Vecteur normal de $\mathcal{P}_2$: $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires | car $\frac{x}{x'} = \frac{1}{2}$, $\frac{y}{y'} = \frac{1}{3}$) $\frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'}$

donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles

donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants

b) <u>Intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.</u>

On cherche les points (x, y, z) tels que

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 - 2z \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 - 2z \\ y = 4 + 4z \end{cases} \quad -2L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2z - (4 + 4z) \\ y = 4 + 4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2z - 4 - 4z \\ y = 4 + 4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 - 6z \\ y = 4 + 4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -5 - 6k \\ y = 4 + 4k \\ z = k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}}$$

2) $A(4, -6, +3)$ $B(6, 2, -2)$ $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\8\\-5\end{pmatrix}$ Vecteur directeur de (AB)

$\vec{n_1} \cdot \vec{AB} = 2 \times 1 + 8 \times 1 - 5 \times 2 = 2 + 8 - 10 = 0$.

donc $\vec{n_1} \perp \vec{AB}$

donc (AB) est parallèle au plan $\mathcal{P}_1$

b) $x_A + y_A + 2z_A + 1 = 4 - 6 + 6 + 1 = 5 \neq 0$

donc $A \notin \mathcal{P}_1$

donc la droite (AB) n'est pas incluse dans $\mathcal{P}_1$

donc (AB) est strictement parallèle à $\mathcal{P}_1$

Ex 2

$A(-1, 1, 3)$

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad A \notin \mathcal{D}.$$

1) a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

b) $B(-1, 3, 0)$ Pour $t = -1$ on a $x = 1 - 2 = -1$

$y = 2 + 1 = 3$

$z = 2 - 2 = 0$

donc $B \in \mathcal{D}$.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 2 \times 0 - 1 \times 2 - 3 \times 2 = -2 - 6 = \boxed{-8}$

2) $A \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$

H point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$

a) $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$

donc $\mathcal{P}$ a pour équation $2x - y + 2z + d = 0$

$A \in \mathcal{P}$ donc $2x_A - y_A + 2z_A + d = 0$

$-2 - 1 + 6 + d = 0$

$3 + d = 0$

$d = -3$

donc $\mathcal{P}$ a pour équation $2x - y + 2z - 3 = 0$

b) Coordonnées de H

$H \in \mathcal{D}$ donc H a pour coordonnées $(1 + 2t, 2 - t, 2 + 2t)$

On cherche t tel que $H \in \mathcal{P}$ donc

$2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0$

$\cancel{2} + 4t - \cancel{2} + t + 4 + 4t - 3 = 0$

$9t + 1 = 0$

$\boxed{t = -\frac{1}{9}}$

$x_H = 1 + 2t = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

$y_H = 2 - t = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9}$

$z_H = 2 + 2t = 2 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$

donc $\boxed{H\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)}$

Ex 2 (2)

3) $B(-1, 3, 0)$ $\quad B \in \mathcal{D}$ $\quad \vec{u}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

a) $A \in \mathcal{P}$, $H \in \mathcal{P}$.

$\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{D}$ est orthogonale à (AH)

b) $H \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{HB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

$\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont colinéaires

donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$

c) D'après a) $\vec{u} \perp \overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \vec{u}$

$= \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u}$

$= 0 + k\vec{u} \cdot \vec{u}$

$= k\|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(0°)$

$= k\|\vec{u}\|^2$

donc $\boxed{k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}}$ $\qquad \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) D'après 1 c) $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = -8$ $\qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}$

donc $\boxed{k = -\frac{8}{9}}$ $\qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 1 + 4}$

$= \sqrt{9} = 3$

On a $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$

$\overrightarrow{HB} = -\frac{8}{9}\vec{u}$

Coordonnées : $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -1 - x_H \\ 3 - y_H \\ -z_H \end{pmatrix}$ $\qquad -\frac{8}{9}\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} -1 - x_H = -\frac{16}{9} \\ 3 - y_H = \frac{8}{9} \\ -z_H = -\frac{16}{9} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_H = -1 + \frac{16}{9} = \frac{7}{9} \\ y_H = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9} \\ z_H = \frac{16}{9} \end{cases}$

$\boxed{H\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)}$