Calculs d'intégrales - Correction

1. $G = \int_0^1 \frac{1}{e^{3x}} + 1 \, dx$ — On reconnait la somme de fonctions dont on connait une primitive

$$G = \int_0^1 \frac{1}{e^{3x}} + 1 \, dx = \int_0^1 e^{-3x} + 1 \, dx$$

$$G = \left[\frac{e^{-3x}}{-3} + x \right]_0^1$$

$$G = \frac{e^{-3}}{-3} + 1 - \left(\frac{e^0}{-3} + 0 \right) = -\frac{e^{-3}}{3} + 1 - \frac{1}{-3} = -\frac{e^{-3}}{3} + 1 + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{-e^{-3} + 4}{3}}$$

2. $H = \int_0^{\ln(2)} e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3} \, dx$ — On reconnait la somme de fonctions dont on connait une primitive

$$H = \int_0^{\ln(2)} e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3} \, dx = \int_0^{\ln(2)} e^{-x} + \frac{1}{3} \times e^{2x} \, dx$$

$$H = \left[\frac{e^{-x}}{-1} + \frac{1}{3} \times \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\ln(2)} = \left[-e^{-x} + \frac{1}{6} e^{2x} \right]_0^{\ln(2)}$$

$$H = -e^{-\ln(2)} + \frac{1}{6} e^{2\ln(2)} - \left(-e^0 + \frac{1}{6} e^0 \right) = -\frac{1}{e^{\ln(2)}} + \frac{1}{6} e^{\ln(4)} - \left(-1 + \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{6} + 1 - \frac{1}{6} = \frac{-3 + 4 + 6 - 1}{6} = \frac{6}{6} = \boxed{1}$$

3. $I = \int_1^2 \frac{x}{3} + \frac{4}{x} \, dx$ — On reconnait la somme de fonctions dont on connait une primitive

$$I = \int_1^2 \frac{1}{3} \times x + 4 \times \frac{1}{x} \, dx$$

$$I = \left[\frac{1}{3} \times \frac{x^2}{2} + 4\ln(x) \right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{6} + 4\ln(x) \right]_1^2$$

$$I = \frac{2^2}{6} + 4\ln(2) - \left(\frac{1^2}{6} + 4\ln(1) \right)$$

$$I = \frac{4}{6} + 4\ln(2) - \frac{1}{6} - 0 = \frac{3}{6} + 4\ln(2) = \boxed{\frac{1}{2} + 4\ln(2)}$$

4. $J = \displaystyle\int_1^4 \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2}\,\mathrm{d}x$

On reconnait la somme de fonctions dont on connait une primitive

$$J = \int_1^4 \frac{3}{4} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + 5 \times \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$J = \left[\frac{3}{4} \times 2\sqrt{x} + 5 \times \frac{-1}{x}\right]_1^4 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{5}{x}\right]_1^4$$

$$J = \frac{3}{2}\sqrt{4} - \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{2}\sqrt{1} - 5\right) = 3 - \frac{5}{4} - \frac{3}{2} + 5 = 8 - \frac{11}{4} = \frac{32-11}{4} = \boxed{\frac{21}{4}}$$

5. $K = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{5x+2}\,\mathrm{d}x$

Faire apparaître la forme $u'\mathrm{e}^u$ qui a pour primitive e^u

On a : $u(x) = \mathrm{e}^{5x+2}$ et $u'(x) = 5\,\mathrm{e}^{5x+2}$

$$K = \int_0^1 \mathrm{e}^{5x+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{5} \times 5\,\mathrm{e}^{5x+2}\,\mathrm{d}x$$

$$K = \left[\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x+2}\right]_0^1 = \frac{1}{5}\left[\mathrm{e}^{5x+2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^7 - \mathrm{e}^2\right)}$$

6. $L = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\left(\frac{4}{x} - 2\right)^2\,\mathrm{d}x$

Faire apparaître la forme $u'u^2$ qui a pour primitive $\dfrac{1}{3}u^3$

On a : $u(x) = \dfrac{4}{x} - 2$ et $u'(x) = \dfrac{-4}{x^2}$

$$L = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\left(\frac{4}{x} - 2\right)^2\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{-4} \times \frac{-4}{x^2}\left(\frac{4}{x} - 2\right)^2\,\mathrm{d}x$$

$$L = \left[\frac{1}{-4} \times \frac{1}{3}\left(\frac{4}{x} - 2\right)^3\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{12}\left(\frac{4}{x} - 2\right)^3\right]_1^2 = -\frac{1}{12}\left[\left(\frac{4}{x} - 2\right)^3\right]_1^2$$

$$L = -\frac{1}{12}\left(0^3 - 2^3\right) = \frac{8}{12} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

7. $M = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Faire apparaître la forme $\dfrac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln(u)$ si u est positif

On a : $u(x) = 3x^2 + 1$ avec $3x^2 + 1 > 0$ sur $[0\,;\,1]$ et $u'(x) = 6x$

$$M = \int_0^1 \frac{x}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{6} \times \frac{6x}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$M = \left[\frac{1}{6}\times\ln\left(3x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left[\ln\left(3x^2+1\right)\right]_0^1$$

$$M = \frac{1}{6}\Big(\ln(4)-\ln(1)\Big) = \boxed{\frac{1}{6}\ln 4}$$

Remarque : $M = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\ln(4) = \frac{1}{3}\times\ln\left(\sqrt{4}\right) = \boxed{\frac{1}{3}\ln(2)}$

8. $N = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{\left(3\sin(x)+2\right)^2}\,dx$

Faire apparaître la forme $\frac{u'}{u^2}$ qui a pour primitive $-\frac{1}{u}$

On a : $u(x) = 3\sin(x)+2$ et $u'(x) = 3\cos(x)$

$$N = \int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{\left(3\sin(x)+2\right)^2}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\times\frac{3\cos(x)}{\left(3\sin(x)+2\right)^2}\,dx$$

$$N = \left[\frac{1}{3}\times\frac{-1}{3\sin(x)+2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{3\sin(x)+2}\right]_0^{\pi}$$

$$N = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3\sin(\pi)+2}-\frac{-1}{3\sin(0)+2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}-\frac{-1}{2}\right) = \boxed{0}$$

9. $O = \displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{e^{-2x}+1}}\,dx$

Faire apparaître la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ qui a pour primitive $2\sqrt{u}$

On a : $u(x) = e^{-2x}+1$ et $u'(x) = -2e^{-2x}$

$$O = \int_0^{1} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{e^{-2x}+1}}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{-2}\times\frac{-2e^{-2x}}{\sqrt{e^{-2x}+1}}\,dx$$

$$O = \left[\frac{-1}{2}\times 2\sqrt{e^{-2x}+1}\right]_0^1 = \left[-\sqrt{e^{-2x}+1}\right]_0^1$$

$$O = -\sqrt{e^{-2}+1}+\sqrt{e^{0}+1} = -\sqrt{e^{-2}+1}+\sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}-\sqrt{e^{-2}+1}}$$