Ex 1

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Soit $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}}$

On fait apparaître $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ dont une primitive est $2\sqrt{u}$

donc $f(x) = 2 \times \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

donc $F(x) = 2 \times 2\sqrt{x^2+1} = 4\sqrt{x^2+1}$

$I = \left[4\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{1} = \boxed{4\sqrt{2}-4}$

2. $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{3}{(1-4x)^2}\,\mathrm{d}x$

Soit $f(x) = \dfrac{3}{(1-4x)^2}$

On fait apparaître $\dfrac{u'}{u^2}$ dont une primitive est $\dfrac{-1}{u}$

donc $f(x) = \dfrac{3}{-4} \times \dfrac{-4}{(1-4x)^2}$

donc $F(x) = \dfrac{-3}{4} \times \dfrac{-1}{1-4x} = \dfrac{3}{4-16x}$

$J = \left[\dfrac{3}{4-16x}\right]_1^2 = \dfrac{3}{4-32} - \dfrac{3}{4-16}$

$J = \dfrac{3}{-28} - \dfrac{3}{-12} = \dfrac{-3}{28} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{28} = \boxed{\dfrac{1}{7}}$

3. $K = \displaystyle\int_0^1 x\left(1+2x^2\right)^2\,\mathrm{d}x$

Soit $f(x) = x\left(1+2x^2\right)^2$

On fait apparaître $u'u^2$ dont une primitive est $\dfrac{u^3}{3}$

On a $f(x) = \dfrac{1}{4} \times 4x\left(1+2x^2\right)^2$

donc $F(x) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{\left(1+2x^2\right)^3}{3} = \dfrac{\left(1+2x^2\right)^3}{12}$

$K = \left[\dfrac{\left(1+2x^2\right)^3}{12}\right]_0^1$

$K = \dfrac{27}{12} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{26}{12} = \boxed{\dfrac{13}{6}}$

Ex 2 Soit $L = \displaystyle\int_0^1 (x-1)^2\,\mathrm{d}x$.

Calculer L de deux façons.

Méthode 1 : on développe $(x-1)^2$

On a : $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

Pour $f(x) = x^2 - 2x + 1$, on a comme primitive $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x$

donc $L = \left[\dfrac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

Méthode 2 : on reconnaît $u'u^2$ qui a pour primitive $\dfrac{u^3}{3}$

En effet, $f(x) = 1 \times (x-1)^2$ donc on a comme primitive $F(x) = \dfrac{(x-1)^3}{3}$

donc $L = \left[\dfrac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = 0 - \dfrac{(-1)^3}{3} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

Ex 3

1. On a : $g(x) = x\sqrt{x}$

donc $g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} = f(x)$

donc g est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

2. $I = \displaystyle\int_4^9 f(x)\ dx = \Big[g(x)\Big]_4^9 = \Big[x\sqrt{x}\Big]_4^9 = 27 - 8 = \boxed{19}$

3. Interprétation graphique du résultat :

Sur $[4\,;9]$, on a $f(x) > 0$ donc l'intégrale I est l'aire (en unité d'aires) du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 9$.