Ex1 $f(x) = x e^{1-x}$ $g(x) = x^2 e^{1-x}$ $x \in \mathbb{R}$.

1) a) Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont deux points d'intersection.

On résout $f(x) = g(x)$

$\iff (x - x^2) e^{1-x} = 0$

$\iff x - x^2 = 0$ } $e^{1-x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff x(1-x) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 1$

donc deux pts d'intersection

b) Signe de $f(x) - g(x)$ sur $[0, +\infty[$

$f(x) - g(x) = (x - x^2) e^{1-x} = x(1-x) e^{1-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{1-x} > 0$

donc $f(x) - g(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 1$

et $f(x) - g(x)$ a le même signe que $x - x^2$ ou $x(1-x)$

trinome $a = -1$

Racines 0 et 1

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$	0	$+$	0	$-$	

2) a) Soit $\phi(x) = (ax^2 + bx + c) e^{1-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Déterminer a, b et c pour que ϕ soit une primitive de h

pour $h(x) = (x - x^2) e^{1-x}$.

$\phi'(x) = (2ax + b) e^{1-x} + (ax^2 + bx + c) \times e^{1-x} \times (-1)$

$= (2ax + b - ax^2 - bx - c) e^{1-x}$

$= (-ax^2 + (2a-b)x + b - c) e^{1-x}$

$\phi'(x) = h(x) \iff \begin{cases} -a = -1 \\ 2a - b = 1 \\ b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2a - 1 \\ c = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

donc $\boxed{\phi(x) = (x^2 + x + 1) e^{1-x}}$

b) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$.

Sur $[0, 1]$ $f(x) - g(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq g(x)$

Sur $[1, 3]$ $f(x) - g(x) \leq 0$ donc $f(x) \leq g(x)$

donc Aire $(\mathcal{D}) = \int_0^1 f(x) - g(x)\, dx + \int_1^3 g(x) - f(x)\, dx$

$= \int_0^1 x e^{1-x} - x^2 e^{1-x} dx + \int_1^3 x^2 e^{1-x} - x e^{1-x} dx$

Ex1 (2)

Aire $(\mathcal{D}) = \int_0^1 (x - x^2) e^{1-x} dx + \int_1^3 (x^2 - x) e^{1-x} dx$

$= \int_0^1 h(x)\, dx + \int_1^3 -h(x)\, dx$

$= \int_0^1 h(x)\, dx - \int_1^3 h(x)\, dx$

$= [\phi(x)]_0^1 - [\phi(x)]_1^3$

$= [(x^2 + x + 1) e^{1-x}]_0^1 - [(x^2 + x + 1) e^{1-x}]_1^3$

$= 3e^0 - 1e^1 - (13 e^{-2} - 3e^0)$

$= 3 - e - 13e^{-2} + 3 = \boxed{6 - e - 13e^{-2}}$

Ex 2 $f(x) = \frac{x^2}{2}$ $g(x) = \frac{8}{x+2}$

1) a) <u>Vérifier que C_f et C_g se coupent au point d'abscisse 2</u>

$f(2) = \frac{4}{2} = 2$ $g(2) = \frac{8}{4} = 2$

$f(2) = g(2)$ donc le point d'abscisse 2 est un point d'intersection de C_f et C_g

b) <u>Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[0, +\infty[$</u>

$$f(x) - g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x+2} = \frac{x^2(x+2) - 8\times 2}{2(x+2)}$$
$$= \frac{x^3 + 2x^2 - 16}{2(x+2)}$$

D'après 1) on a $f(2) - g(2) = 0$.
donc 2 annule le numérateur. donc $x^3 + 2x^2 - 16$ peut se factoriser.

$$x^3 + 2x^2 - 16 = (x-2)(x^2 + ax + 8)$$

<u>terme en x^2</u> : $2x^2$ | <u>terme en x^2</u> $ax^2 - 2x^2 = (a-2)x^2$

donc $a - 2 = 2$
$a = 4$

donc $x^3 + 2x^2 - 16 = (x-2)(x^2+4x+8)$
(On vérifie de tête en développant)

donc $f(x) - g(x) = \frac{(x-2)(x^2+4x+8)}{2(x+2)}$

$\forall x \in [0, +\infty[$ $2(x+2) > 0$
donc $f(x) - g(x) = 0 \iff (x-2)(x^2+4x+8) = 0$
et $f(x) - g(x)$ a même signe que $(x-2)(x^2+4x+8)$

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
x^2+4x+8		$+$		$+$	
$(x-2)(x^2+4x+8)$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	

$x^2 + 4x + 8 = 0$
$\Delta = 16 - 32$
$\Delta < 0$
pas de racine
donc
$x^2 + 4x + 8$
toujours positif.

2) a) <u>Déterminer une primitive de f et de g sur $[0, +\infty[$</u>

$f(x) = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$ $F(x) = \frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{6}$

$g(x) = \frac{8}{x+2} = 8\times\frac{1}{x+2}$ $G(x) = 8\ln(x+2)$
car $x+2 > 0$ sur $[0, +\infty[$

b) <u>Calculer Aire ($\mathcal{D}$) pour $k > 2$</u>

Sur $[0, 2]$ $f(x) - g(x) \leq 0$ donc $f(x) \leq g(x)$
Sur $[2, +\infty[$ $f(x) - g(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq g(x)$

donc $\text{Aire}(\mathcal{D}) = \int_0^2 g(x) - f(x)\,dx + \int_2^k f(x) - g(x)\,dx$

$$= \left[G(x) - F(x)\right]_0^2 + \left[F(x) - G(x)\right]_2^k$$
$$= \left[8\ln(x+2) - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{6} - 8\ln(x+2)\right]_2^k$$
$$= 8\ln(4) - \frac{8}{6} - 8\ln(2) + \left(\frac{k^3}{6} - 8\ln(k+2) - \frac{8}{6} + 8\ln 4\right)$$
$$= 8\ln(4) - \frac{8}{6} - 8\ln(2) + \frac{k^3}{6} - 8\ln(k+2) - \frac{8}{6} + 8\ln(4)$$
$$= 16\ln(4) - \frac{8}{3} + \frac{k^3}{6} - 8\ln(2) - 8\ln(k+2)$$
$$= 32\ln(2) - 8\ln(2) - \frac{8}{3} + \frac{k^3}{6} - 8\ln(k+2)$$
$$= 24\ln(2) - \frac{8}{3} + \frac{k^3}{6} - 8\ln(k+2)$$

Ex 3

1) $\mathcal{A}$ est l'aire sous la courbe de f à laquelle on soustrait l'aire d'un triangle

(*) $\mathcal{A} = \int_0^a f(x)\,dx - \frac{1\times 1}{2} = \int_0^a e^{-x}\,dx - \frac{1}{2} = \left[-e^{-x}\right]_0^a - \frac{1}{2}$

$\mathcal{A} = -e^{-a} + e^0 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} - e^{-a}}$

2) $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathcal{A} = \lim\limits_{a\to+\infty} \frac{1}{2} - e^{-a} = \boxed{\frac{1}{2}}$

3) Pour $a = 2$ $\mathcal{A} = \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}}$ U.A

avec $1\,\text{U.A} = 3\times 2{,}5\,\text{cm}^2 = 7{,}5\,\text{cm}^2$

donc $\mathcal{A} \simeq \left(\frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}}\right)\times 7{,}5\,\text{cm}^2$

$$\boxed{\mathcal{A} \simeq 2{,}73\,\text{cm}^2}$$

(*) <u>Méthode 2</u> : $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) - (-x+1)\,dx + \int_1^a f(x)\,dx$

⚠ $= \int_0^1 e^{-x} + x - 1\,dx + \int_1^a e^{-x}\,dx$

$= \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[-e^{-x}\right]_1^a = -e^{-1} + \frac{1}{2} - 1 + (-e^{-a} + e^{-1})$