

| 60 bleus | 40 Rouges | Total 100. |
|---|---|------------|
| Cercles (40%) $60 \times \frac{40}{100} = 24$ | Cercles (20%) $\frac{20}{100} \times 40 = 8$ | |
| Losanges (20%) $\frac{20}{100} \times 60 = 12$ | Losanges: (x%) | |
| Étoiles: 24 | Étoiles (80-x)% | |

Partie A On tire 3 cubes simultanément.

1) Probabilité de n'avoir aucun cube rouge: $\frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}$

Probabilité d'avoir au moins un cube rouge:

$$1 - \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}} \approx 0,788$$

2) Probabilité d'avoir 3 cubes rouges: $\frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = P(R)$

Probabilité d'avoir 3 cubes bleus: $\frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}} = P(B)$

Probabilité d'avoir 3 cube de la même couleur:

$$P(R \cup B) = P(R) + P(B) \quad R, B \text{ étant incompatibles}$$

$$= \frac{1217}{8075} \approx 0,279$$

3) Nombre de cubes marqués d'un cercle: $24 + 8 = 32$

Probabilité d'avoir exactement un cube marqué d'un cercle

$$\frac{\binom{32}{1} \times \binom{68}{2}}{\binom{100}{3}} = \frac{18224}{40125} \approx 0,454$$

Partie B $x \in [0, 80]$ On tire au hasard un cube

1) Nombre de cubes marqués d'un losange.

Cubes bleus: 12

Cubes rouge: $\frac{x}{100} \times 40 = 0,4x$

$$12 + 0,4x$$

La probabilité de piocher un cube avec un losange est:

$$\frac{12 + 0,4x}{100} = 0,12 + 0,004x$$

2) Nombre de cubes avec une étoile.

Cubes bleus: 24

Cubes rouges: $\frac{80-x}{100} \times 40 = 4(8-0,1x) = 32 - 0,4x$

$$\text{Au total: } 24 + 32 - 0,4x = 56 - 0,4x$$

La probabilité de tirer un cube avec une étoile est:

$$\frac{56 - 0,4x}{100} = 0,56 - 0,004x$$

La probabilité d'avoir un cube avec un losange est égale à celle d'avoir un cube avec une étoile si et seulement si

$$0,12 + 0,004x = 0,56 - 0,004x$$

$$\Leftrightarrow 0,008x = 0,44$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0,44}{0,008} \Leftrightarrow x = 55$$

3) On note B: "tirer un cube bleu"

L: "tirer un cube avec un losange"

B et L sont indépendants $\Leftrightarrow P(B \cap L) = P(B) \times P(L)$

$$\text{On a } P(B \cap L) = \frac{12}{100} = 0,12$$

$$\text{donc } P(B \cap L) = P(B) \times P(L) \Leftrightarrow \frac{60}{100} \times (0,12 + 0,004x) = 0,12$$

$$\Leftrightarrow 0,12 + 0,004x = \frac{0,12}{0,6}$$

$$\Leftrightarrow 0,004x = 0,2 - 0,12$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0,08}{0,004}$$

$$\Leftrightarrow x = 20$$

$$4) P(B) = \frac{P(B \cap L)}{P(L)} = \frac{0,12}{0,12 + 0,004 \times 50}$$

$$\text{avec } x = 50 = 0,375$$