

Exercice 1 On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 &= \frac{1}{2} \\ U_{n+1} &= g(U_n) \end{cases}$$
 pour tout entier naturel n .

2. Calculer U_1 et U_2 .

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < U_n < U_{n+1} < 1$.

4. En déduire que la suite (U_n) est convergente.

5. Déterminer la limite ℓ de la suite (U_n) .

On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = \ln(1 - U_n)$.

6. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.

7. En déduire une expression de V_n en fonction de n .

8. En déduire une expression de U_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.

9. Compléter le script Python ci-contre afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=...
        u=...
    return n
```

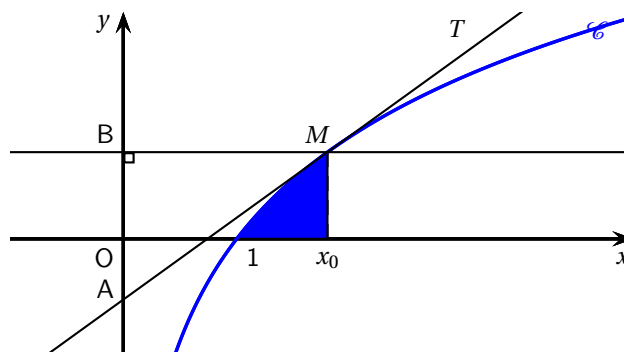
Exercice 2 Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = a \ln(x)$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de l'axe des abscisses.

2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x \ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3. En déduire l'aire du domaine coloré en fonction de a et de x_0 .



On note T la tangente à la courbe \mathcal{C} au point M d'abscisse x_0 .

On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.