Suites

Exercice 1

1. Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 3$ et pour tout entier naturel n ,

   $U_{n+1} = 2U_n - 1$. Calculer U_2

   Il est nécessaire de calculer U_1 pour avoir U_2

   On a : $U_1 = 2U_0 - 1 = 5$ puis $U_2 = 2U_1 - 1 = 9$

   Réponse : $\boxed{U_2 = 9}$

2. Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = -4$ et pour tout entier naturel n,

   $U_{n+1} = nU_n + 6$. Calculer U_1, U_2 et U_3

   On a : $U_1 = 0 \times U_0 + 6 = 6$ Réponse : $\boxed{U_1 = 6}$

   puis $U_2 = 1 \times U_1 + 6 = 12$ Réponse : $\boxed{U_2 = 12}$

   puis $U_3 = 2 \times U_2 + 6 = 30$ Réponse : $\boxed{U_3 = 30}$

3. Soit la suite (V_n) définie par $V_0 = 2$, $V_1 = 4$ et pour tout entier naturel n, $V_{n+2} = (n-2)V_{n+1} - V_n$. Calculer V_2

   On a : $V_2 = -2V_1 - V_0 = -8 - 2 = -10$

   Réponse : $\boxed{V_2 = -10}$

Exercice 2 Reconnaitre des suites arithmétiques ou géométriques parmi les cas suivants :

1. $U_{n+1} = U_n - \sqrt{2}$
2. $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{3}$
3. $U_{n+1} = -4 + U_n$
4. $U_{n+1} = 5 - U_n$
5. $U_{n+1} = -U_n$
6. $U_{n+1} = U_n \times 2n$
7. $U_{n+1} = U_n + n$
8. $U_{n+1} = 3U_n - 1$

Réponse : **1. , 2. , 3. , 5.** En effet :

1. $U_{n+1} = U_n - \sqrt{2}$ Suite arithmétique de raison $-\sqrt{2}$

2. $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{3}$ Suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ car $U_{n+1} = U_n \times \dfrac{1}{3}$

3. $U_{n+1} = -4 + U_n$ Suite arithmétique de raison -4 car $U_{n+1} = U_n - 4$

5. $U_{n+1} = -U_n$ Suite géométrique de raison -1 car $U_{n+1} = U_n \times (-1)$

   Les autres suites ne peuvent pas s'écrire sous la forme $U_{n+1} = U_n + r$ ou $U_{n+1} = U_n \times q$ avec r et q constants.

Exercice 3 Déterminer le nombre de termes dans les sommes suivantes :

1. $U_0 + U_1 + \cdots + U_{12}$

   Remarque : si on a $U_1 + \cdots + U_{12}$, on va de 1 à 12 donc 12 termes, auquel on rajoute le terme U_0, soit un terme de plus.

   Réponse : $\boxed{\text{13 termes}}$

2. $U_{10} + U_{11} + \cdots + U_{30}$

   Remarque : si on a $U_1 + \cdots + U_{30}$, on va de 1 à 30 donc 30 termes, auxquels on retire les termes U_1, ..., U_9 soit 9 termes en moins donc un total de $30 - 9 = 21$.

   Réponse : $\boxed{\text{21 termes}}$

3. $2 + 2^2 + 2^3 \cdots + 2^{40}$

   Remarque : on a : $2^1 + 2^2 + 2^3 \cdots + 2^{40}$, on va de 1 à 40 donc 40 termes

   Réponse : $\boxed{\text{40 termes}}$

4. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{25}$

Remarque : si on a : $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{25}$, on va de 1 à 25 soit 25 termes, on retire les termes $\sqrt{1}$ et $\sqrt{2}$ soit deux termes en moins donc au total 23 termes.

Réponse : $\boxed{\text{23 termes}}$

Exercice 4 Donner une expression de S_{n+1} en fonction de n dans les cas suivants :

1. $S_n = \dfrac{2n-1}{3}$

   $S_{n+1} = \dfrac{2(n+1)-1}{3} = \dfrac{2n+1}{3}$

   Réponse : $\boxed{S_{n+1} = \dfrac{2n+1}{3}}$

2. $S_n = 3n^2 - n$

   $S_{n+1} = 3(n+1)^2-(n+1) = 3(n^2+2n+1)-n-1 = 3n^2+5n+2$

   Réponse : $\boxed{S_{n+1} = 3n^2+5n+2}$

3. $S_n = (3n-1)^2$

   $S_{n+1} = (3(n+1)-1)^2 = (3n+2)^2 = 9n^2+12n+4$

   Réponse : $\boxed{S_{n+1} = 9n^2+12n+4}$

Exercice 5 Soit la suite (W_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ par

$$W_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

1. Calculer W_3

   $W_3 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$

   Réponse : $\boxed{W_3 = \dfrac{5}{6}}$

2. Exprimer W_5 en fonction de W_3 puis en déduire W_5

   $W_5 = W_3 + \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$ donc $\boxed{W_5 = W_3 + \dfrac{9}{20}}$ donc $W_5 = \dfrac{5}{6}+\dfrac{9}{20} = \dfrac{50+27}{60} = \dfrac{77}{60}$

   Réponse : $\boxed{W_5 = \dfrac{77}{60}}$

3. Exprimer W_{n+1} en fonction de W_n.

   Réponse : $\boxed{W_{n+1} = W_n + \dfrac{1}{n+1}}$

Exercice 6 Soit la suite (S_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par

$$S_n = 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+n\times 2^{n+1}$$

1. Calculer S_2.

   $S_2 = 2^2+2\times 2^3 = 4+16 = 20$

   Réponse : $\boxed{S_2 = 20}$

2. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n

   Réponse : $\boxed{S_{n+1} = S_n + (n+1)2^{n+2}}$

Exercice 7 Soit la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k+1}$.

Calculer les trois premiers termes de la suite (S_n).

$S_0 = \dfrac{0^2}{0+1} = 0$ Réponse : $\boxed{S_0 = 0}$

$S_1 = \dfrac{0^2}{0+1}+\dfrac{1^2}{1+1} = 0+\dfrac{1}{2} =$ Réponse : $\boxed{S_1 = \dfrac{1}{2}}$

$S_2 = \dfrac{0^2}{0+1}+\dfrac{1^2}{1+1}+\dfrac{2^2}{2+1} = 0+\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3} = \dfrac{3}{6}+\dfrac{8}{6} =$ Réponse : $\boxed{S_2 = \dfrac{11}{6}}$

Exercice 8 Utiliser la notation $\sum$ pour définir les sommes suivantes :

1. $W_n = \dfrac{1}{2-3}+\dfrac{1}{2-4}+\dfrac{1}{2-5}+\cdots+\dfrac{1}{2-n}$ pour $n \geqslant 3$

   Réponse : $\boxed{W_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2-k}}$

2. $S_n = 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+n\times 2^{n+1}$ pour $n \geqslant 1$

   Réponse : $\boxed{S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times 2^{k+1}}$